





# الحقيبة التدريبية

# لتأهيل الطلاب لتصفيات

# أولمبياد الرياضيات بكازاخستان

# لعام ٢٠١٠ م

## المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على سيدنا ونبينا محمد بن عبدالله سيد الأولين والآخرين وعلى آله وصحبه أجمعين

فبعد الاجتماع في موهبة بالرياض يوم الثلاثاء 1430/8/27هـ ،والتكليف بتنقيح مادة الجبر للحقيبة التدريبية التي أعدت للملتقى الأول لتأهيل الفريق السعودي المشارك في أولمبياد الرياضيات الدولي 2010م الذي عقد بالهدا في الفترة 7/25ـ1430/8/7هـ.

وبعد بدأ العمل في هذه الحقيبة التي استلمتها وكانت في حدود 35صفحة وفق التنسيق المطلوب للخط واجهتني صعوبات أهمها :

- عدم شمول الحقيبة للمفردات المطلوبة في الحقيبة فقد نقص منها ما يلي:

قوانين التوافيق ، حل المعادلات مختلفة الدرجات، حل نظم معادلات خطية وغير خطية، العلاقة الارتدادية، الأعداد المركبة، الأسس واللوغاريتمات، معادلات الدوال.

- المرجعان المقترحان لمادة الجبر غير شاملين لكل النقاط ومن جهة غير متوفرين وبعد بحث استطعت الحصول على أحدهما وهو (Problems in Algebra 101 By T. Andreescu)،ولم أتمكن من الحصول على الثاني وهو (The Art of Problem Solving ( Vol. 1 Basics ) By R. Rusczyk & S. Lehoczky).
- دعت الضرورة إلى الحصول على مراجع أخرى لتغطية النقص الحاصل في الحقيبة التدريبية والمرجعين السابقين واستخدام أسلوب حل المسائل في تقديم الأمثلة ليتعرف الطالب على هذه الطريقة.
- هذا الأمر ضخم من حجم الحقيبة بالضرورة وفق التنسيق المطلوب.
- تم بناء حقيبة الطالب وفق الأمثلة المحلولة في الحقيبة حتى لا يتحول العمل من تدريب إلى تدريس ،ويراعى تقديم الأمثلة المحلولة بعد محاولة الطالب حلها خلال التدريب.
- نأمل أن يتمكن المتدرب من حل جميع الأمثلة والتمارين بنفسه، والمقصود بكثرتها زيادة خبرة ومهارة المتدرب في التعامل مع هذه المسائل مما يؤدي إلى زيادة ثقته بنفسه.
- حلول الأمثلة المقدمة مطولة ويمكن اختصار بعض خطواتها ولكن قصد بذلك أن يتمكن المتدرب من الحقائق والنظريات الرياضية التي تعالجها.
- بعض الأمثلة كرر في أكثر من مكان من أجل تقديم أفكار مختلفة لحله.
- توظيف نتائج بعض الأمثلة لحل أمثلة جديدة مما يساعد على إيجاد قدرة لدى المتدرب في حل الأفكار الجديدة أو البدء بحلها وتطوير محاولات الحل والذي سيوجد نوع من الألفة بين المتدرب والمسائل الأكثر صعوبة مع الوقت.
- وأخيرا تم تجميع التمارين الاثرائية في نهاية الحقيبة ليتعود المتدرب على أن حل المسائل الرياضية يتطلب الصبر والمثابرة وعدم استنساخ الحلول بمقارنتها بالمسائل التي تمت معالجتها قبلها مباشرة.

وأقدم هذا العمل وقد بذلت ما في وسعي ـ ضمن حدود الزمن المتاح ـ ليظهر بالصورة المرجوة. وآمل أن أكون قد وفقت في ذلك.

والله الموفق

أحمد بيبا سيدي

## 1.1 : بعض المتطابقات الأساسية الهامة :

$$(y \pm x)^2 = y^2 + x^2 \pm 2yx$$

$$(y \pm x)^3 = y^3 \pm 3y^2x + 3yx^2 \pm x^3 = \boxed{y^3 \pm x^3 + 3yx(x \pm y)}$$

$$y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$$

$$y^3 \pm x^3 = (y \pm x)(y^2 \mp yx + x^2)$$

$$y^4 - x^4 = (y - x)(y^3 + y^2x + yx^4 + x^3)$$

$$y^5 - x^5 = (y - x)(y^4 + y^3x + y^2x^2 + yx^3 + x^4)$$

و بشكل عام ، لأي عدد صحيح موجب $n$ فإن :

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + ... + yx^{n-2} + x^{n-1})$$

و لكل عدد فردي $n$ فإن:

$$y^n + x^n = (y + x)(y^{n-1} - y^{n-2}x + ... + yx^{n-2} + x^{n-1})$$

**ونعرف المحدد** $2\times 2, 3\times 3$ **بالشكل:**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b.\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c.\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

**بعض المتطابقات المثلثية:**

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos x \pm \cos x \sin x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

## 2.1 : التحليل إلى عوامل :

أخي المتدرب : نشاط رقم 1 التاريخ / / 1430 هـ

استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :

01) أوجد $(x+y+z)^2$ ؟

02) أوجد $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$ ؟

03) حلل $x^4+x^2y^2+y^4$ .؟

**مثال1:**

أوجد $(x+y+z)^2$ ؟

**الحل:**

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

(توضيح الخطوات متروك للمتدرب بملاحظة أن $(x+y+z)=(x+(y+z))$ ).

**مثال2:**

أوجد $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$ ؟

**الحل:**

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)=1+(a+b+c+d)+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$+(abc+abd+acd+bcd)+abcd$$

لنلاحظ كيف تتشكل الحدود:

$a=a\times1\times1\times1$ ...وبالمثل $ab=a\times b\times1\times1$ ...وبالمثل $abc=a\times b\times c\times1$ ...بينما $abcd=a\times b\times c\times d$

(كيف يمكن تعميم المسألة في حالة $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ ؟ متروك للمتدرب).

**ملاحظة :**

عند التحليل قد يكون من المفيد إضافة أو طرح مقدار أو أكثر من أجل الحصول على إحدى المتطابقات مما يساعدنا على حل المسألة .

**مثال3:**

حلل $x^4+x^2y^2+y^4$ .؟

**الحل:**

$$x^4+x^2y^2+y^4 = x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$$

نلاحظ أننا قمنا بإضافة وطرح المقدار $x^2y^2$ ومن ثم الاستفادة من المتطابقات الأساسية.

أخي المتدرب : نشاط رقم **2** التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) حلل $x^4+3x^2+4$ ؟

02) حلل المقدار $a^3+b^3+c^3-3abc$ ؟.

أخي المتدرب : نشاط رقم **3**

التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

03) حلل $a^4 + 4b^4$ ؟.

04) بين أنه لكل عدد صحيح $n$ فإن العدد $n^4 - 20n^2 + 4$ مؤلف؟.

**مثال4:**

حلل $x^4+3x^2+4$ ؟

**الحل:**

$$\begin{aligned} x^4+3x^2+4 &= x^4+4x^2+4-x^2 \\ &= \left(x^2+2\right)^2-x^2 \\ &= \left(x^2+x+2\right)\left(x^2-x+2\right) \end{aligned}$$

**مثال5 :**

حلل المقدار $a^3+b^3+c^3-3abc$ ؟.

**الحل1 :**

$$\because \boxed{(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)}$$

$$\begin{aligned} \therefore a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc \\ &= (a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)^3-3(a+b)c(a+b+c)-3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)\left((a+b+c)^2-3(a+b)c-3ab\right) \\ &= (a+b+c)\left((a+b+c)^2-3ac-3bc-3ab\right) \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-3ac-3bc-3ab) \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \end{aligned}$$

يمكن كتابة الناتج بالشكل:

$$\begin{aligned} \because\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) \\ &= \frac{1}{2}((a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)) \\ &= \frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2) \end{aligned}$$

وبالتالي: $$\boxed{a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)}$$

**الحل2 :**

لنلاحظ المحددة $A$ المكونة من العناصر $a,b,c$ بالشكل:

$$A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \Rightarrow A=a^3+b^3+c^3-3abc$$

من خواص المحددات عند إضافة العمودين الثاني والثالث للعمود الأول لن تتغير المحددة:

$$A=\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c).\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c).(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c).(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$$

**مثال6 :**

حلل $a^4+4b^4$ ؟.

**الحل :**

$$a^4+4b^4=a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2$$
$$=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2$$
$$=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2$$
$$=(a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab)$$

> **تذكر : Sophie Germain identity**
>
> $$a^4+4b^4=(a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab)$$

**مثال7 :**

بين أنه لكل عدد صحيح $n$ فإن العدد $n^4-20n^2+4$ مؤلف؟.

**الحل :**

فكرة المسألة هي تحليل العدد $n^4-20n^2+4$

ممكن أن نحاول إكمال مربع بالشكل $n^4-20n^2+4=(n^4-20n^2+100)-96=(n-10)^2-96$ والذي لا يساعد على الحل لأن 96 ليس مربعا كاملا.

لذا نحاول تجزئة المقدار $n^4-20n^2+4=(n^4-4n^2+4)-16n^2=(n^2-2)^2-(4n)^2=(n^2-2-4n)(n^2-2+4n)$

يكون المقدار عددا مؤلفا إذا كان أيا من العاملين $(n^2-2-4n),(n^2-2+4n)$ مغايرا لــ $\pm1$

لنفرض أن

$$n^2-2+4n=1$$
$$\Rightarrow n^2+4n-3=0\Rightarrow \boxed{n=-2\pm\sqrt{7}}$$

نلاحظ أن $n$ لا تمثل عددا صحيحا وبالمثل باقي الحالات الثلاث (متروكة للمتدرب).

أي أن العدد $n^4-20n^2+4$ مؤلفا.

## 3.1 نظرية ذات الحدين ومثلث باسكال

### معاملات ذات الحدين Binomial Coefficients

بعض خصائص التوافيق:

إذا كانت $n \ge k \ge 0$ فإن :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \qquad ;k \neq 0$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad ;k \neq 0$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

$$\binom{r}{0}\binom{s}{n} + \binom{r}{1}\binom{s}{n-1} + \ldots + \binom{r}{n}\binom{s}{0} = \binom{r+s}{n}$$

**نظرية ذات الحدين**

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

أخي المتدرب : نشاط رقم **4** التاريخ / / 1430 هـ

استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :

01) أثبت أن $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ؟

02) أحسب $\binom{n}{1}+2.\binom{n}{2}+3.\binom{n}{3}+...+n.\binom{n}{n}$ ؟

**مثال1:**

أثبت أن $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ؟

**الحل:**

سنقوم بإثبات العلاقة باستخدام خصائص التوافيق:

$$
\begin{aligned}
1+2+3+...+n &= \binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+...+\binom{n}{1} \\
&= \binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+...+\binom{n}{n-1} \\
&= \binom{n+1}{n-1} = \binom{n+1}{(n+1)-(n-1)} = \binom{n+1}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}
\end{aligned}
$$

وهو المطلوب.

يمكن إثباتها باستخدام الاستقراء كما سبق للمتدرب دراستها.

**مثال2:**

أحسب $\binom{n}{1}+2.\binom{n}{2}+3.\binom{n}{3}+...+n.\binom{n}{n}$ ؟

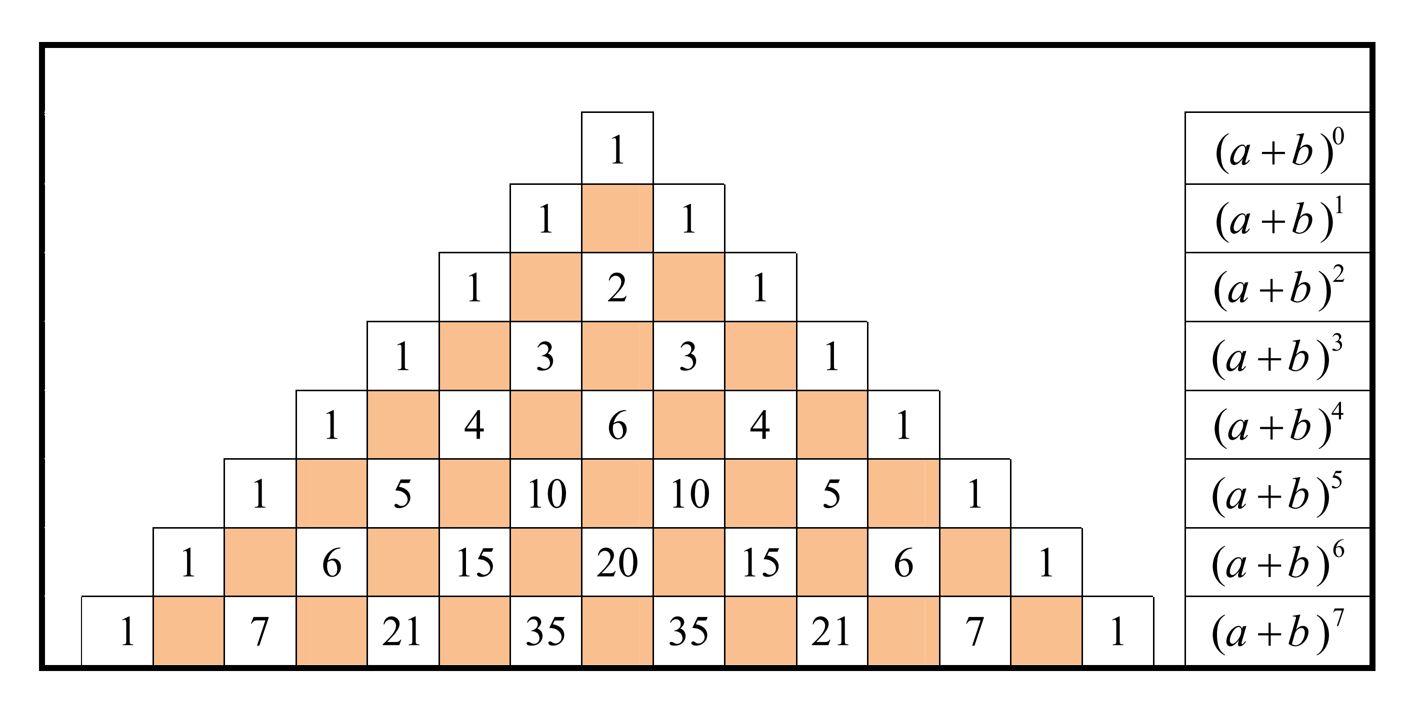
**الحل:**

$$\binom{n}{1}+2.\binom{n}{2}+3.\binom{n}{3}+...+n.\binom{n}{n}=\sum_{k=1}^{n}k.\binom{n}{k}$$

$$\because \quad \binom{n}{k}=\frac{n}{k}.\binom{n-1}{k-1} \quad ;k\neq 0 \Rightarrow k.\binom{n}{k}=n.\binom{n-1}{k-1} \quad ;k\neq 0$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad \sum_{k=1}^{n}k.\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}n.\binom{n-1}{k-1} \\
&= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = \boxed{n\times 2^{n-1}} \qquad ;\boxed{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n}
\end{aligned}
$$

## مثلث باسكال "



| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(a+b)^0$ | 1 | | | | | | | |
| $(a+b)^1$ | 1 | 1 | | | | | | |
| $(a+b)^2$ | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| $(a+b)^3$ | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| $(a+b)^4$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| $(a+b)^5$ | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | |
| $(a+b)^6$ | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | |
| $(a+b)^7$ | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |

ونستمر بنفس الطريقة لأي قوة أعلى من 7

مع ملاحظة أن المعاملات تبدأ بالعدد (1) وتنتهي به

والمعاملات الأخرى ناتجة من جمع العددين اللذين يعلوان ذلك المعامل .

**و نعلم من نظرية ذات الحدين للكرخي أن :**

$$(a+b)^n = \square a^n b^0 + \square a^{n-1} b^1 + \square a^{n-2} b^2 + \square a^{n-3} b^3 + \ldots + \square a^0 b^n$$

ونملأ ( مربع المعاملات ) من مثلث باسكال السابق ..

**مثال3:**

احسب $(x+2y)^4$ ؟

**مثال:**

$$(x+2y)^4 = 1x^4(2y)^0 + 4x^3(2y)^1 + 6x^2(2y)^2 + 4x^1(2y)^3 + 1x^0(2y)^4$$
$$= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$$

## 4.1: تبسيط الحسابات:

أخي المتدرب : نشاط رقم 5 | التاريخ / / 1430 هـ

استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى:

01) بسط المقدار $(\sqrt{7}+\sqrt{6}+\sqrt{5}-)(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$ ؟.

02) أكتب المقدار $a=2.\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$ في أبسط صورة؟.

03) أحسب $\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$ ؟.

**مثال1 :**

بسط المقدار $(\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$ ؟.

**الحل :**

$$\because\ (\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}) = (\sqrt{5}+\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2 = 5+6+2\sqrt{30}-7 = \boxed{4+2\sqrt{30}}$$

$$\because (\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}) = (\sqrt{7}+(\sqrt{5}-\sqrt{6}))(\sqrt{7}-(\sqrt{5}-\sqrt{6}))$$

$$= (\sqrt{7})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{6})^2 = 7-(5+6-2\sqrt{30}) = \boxed{-4+2\sqrt{30}}$$

$$\therefore (\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$$

$$= (4+2\sqrt{30})(-4+2\sqrt{30}) = (2\sqrt{30}+4)(2\sqrt{30}-4) = 120-16 = \boxed{104}$$

**مثال2 :**

أكتب المقدار $a = 2.\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$ في أبسط صورة؟.

**الحل1 :**

باستخدام علاقة أبو كامل المصري:

$$\because \sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}\ ;x,y \succ 0$$

$$a = 2.\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right) = 2.\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{2}+1}-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$$

$$= 2.\sqrt{\frac{1}{2}+2.\sqrt{\frac{1}{2}}+1}-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$$

$$= 2.\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{1}\right)-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$$

$$= 2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}+2-\frac{3}{2}-\sqrt{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

**الحل 2:**

$$a = 2.\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}\right)\left(2-\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}\right)\quad (?)$$

واضح أن المقدار موجب لأن

**تذكر:**

إذا كانت $ax^2+bx+c=0$ فإن:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$a^2=\left(2.\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)\right)^2=\left(4.\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)+\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)^2-4.\left(\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)\right)$$

$$=\left(6+4\sqrt{2}\right)-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)^2+2.\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)^2-4.\left(\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$$

$$=\left(6+4\sqrt{2}\right)-\left(\frac{17}{4}+3\sqrt{2}\right)-2.\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)\left(2.\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{7}{4}+\sqrt{2}\right)-\left(3+2\sqrt{2}\right)(a)$$

$$\Rightarrow a^2+\left(3+2\sqrt{2}\right)(a)-\left(\frac{7}{4}+2\sqrt{2}\right)=0$$

$$a=\frac{-\left(3+2\sqrt{2}\right)\pm\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times\left(-\left(\frac{7}{4}+\sqrt{2}\right)\right)}}{2\times1}$$

$$=\frac{-\left(3+2\sqrt{2}\right)\pm\sqrt{\left(9+8+12\sqrt{2}\right)+\left(7+4\sqrt{2}\right)}}{2}$$

$$=\frac{-\left(3+2\sqrt{2}\right)\pm\sqrt{\left(16+8+16\sqrt{2}\right)}}{2}=\frac{-\left(3+2\sqrt{2}\right)\pm\sqrt{\left(4+2\sqrt{2}\right)^2}}{2}$$

$$=\frac{-\left(3+2\sqrt{2}\right)\pm\left(4+2\sqrt{2}\right)}{2}\Rightarrow a=\frac{-\left(3+2\sqrt{2}\right)+\left(4+2\sqrt{2}\right)}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}\qquad(?)$$

**مثال 3:**

أحسب $\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$ ؟.

**الحل :**

سبق أن نافشنا العلاقة $\boxed{a^4+4b^4=(a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab)}$ والتي سنحاول الاستفادة منها هنا.

$$\boxed{a^4+4\cdot3^4=(a^2+2\cdot3^2-2\cdot3\cdot a)(a^2+2\cdot3^2+2\cdot3\cdot a)=(a(a-6)+18)(a(a+6)+18)}$$

$$x=[(10(10-6)+18)(10(10+6)+18)][(22(22-6)+18)(22(22+6)+18)]\cdots[(58(58-6)+18)(58(58+6)+18)]$$

$$y=[(4(4-6)+18)(4(4+6)+18)][(16(16-6)+18)(16(16+6)+18)]...[(52(52-6)+18)(52(52+6)+18)]$$

$$\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{(10(4)+18)(10(16)+18)(22(16)+18)(22(28)+18)\cdots(58(52)+18)(58(64)+18)}{(4(-2)+18)(4(10)+18)(16(10)+18)(16(22)+18)\cdots(52(46)+18)(52(58)+18)}$$

$$=\frac{(58(64)+18)}{(4(-2)+18)}=\frac{3730}{10}=\boxed{373}$$

### 5.1 : كثيرات الحدود

تعريف:

إذا كانت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ حيث $a_i\in\mathbb{R}$ لكل $0\le i\le n$ و $a_n\neq 0$ فإننا نقول أن $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة $n$ ذات معاملات حقيقية .

**لاحظ أن:**

يوجد بصفة عامة $(n+1)$ حدا في كثيرة الحدود من الدرجة $n$ مع ملاحظة الحدود التي معاملاتها صفرا إن وجدت.

- الحد العام لكثيرة الحدود هو : $a_rx^{n-r}$ .

و نقول أن $a_i\in\mathbb{R}$ $f(x)$ كثيرة حدود واحدية إذا كان معامل $x^n$ يساوي الواحد الصحيح ، أي أن $a_n=1$

فمثلاً $f_{(x)}=2x^3+3x+5$ كثيرة حدود غير واحدية من الدرجة الثالثة ، بينما $g_{(x)}=x^4-3x^3+5x^2-1$ كثيرة حدود واحدية من الدرجة الرابعة .

**قسمة كثيرتي حدود :**

إذا كانت $f_{(x)}=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ و $g_{(x)}=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0$ كثيرتي حدود من الدرجة $n$ و $m$ على الترتيب ، حيث $n\ge m$ فإنه عند قسمة $f_{(x)}$ على $g_{(x)}$ توجد كثيرتي حدود وحيدتين $r_{(x)},q_{(x)}$ بحيث $f_{(x)}=g_{(x)}.q_{(x)}+r_{(x)}$ .

حيث $r_{(x)}=0$ أو درجة $r_{(x)}$ أقل من درجة $g_{(x)}$ .

تسمى كثيرة الحدود $q_{(x)}$ بخارج القسمة و $r_{(x)}$ بالباقي .

و إذا كان $r_{(x)}=0$ فإننا نقول أن $g_{(x)}$ تقسم $f_{(x)}$ أو $g_{(x)}$ عامل من عوامل $f_{(x)}$ .

**مثال1 :**

إذا كان $f_{(x)}=x^4-1$ و $g_{(x)}=x-1$ فإن $g_{(x)}$ عامل من عوامل $f_{(x)}$ لأن :

$$f_{(x)}=(x-1)\left[(x+1)(x^2+1)\right]$$

و أيضًا كلًا من $x+1$ و $x^2+1$ عامل من عوامل $f_{(x)}$ .

**مثال2 :**

أوجد خارج قسمة و باقي قسمة $f_{(x)}=x^7-1$ على $x^3+x+1$ .

**الحل :**

باستخدام القسمة المطولة فإننا نجد :

$$x^7-1=\underbrace{(x^3+x+1)}_{g(x)}\underbrace{(x^4-x^2-x+1)}_{q(x)}+\underbrace{(2x^2-2)}_{r(x)}$$

## 6.1 : نظريتا الباقي والعوامل :

### نظرية الباقي :

إذا كان $f_{(x)}$ كثيرة حدود من الدرجة $n$ و كان $a \in \mathbb{R}$ فإنه عند قسمة $f_{(x)}$ على $(x-a)$ فإن الباقي $f_{(a)} = r$ .

### نظرية العوامل :

إذا كان $f_{(x)}$ كثيرة حدود من الدرجة $n$ و كان $a \in \mathbb{R}$ فإن $f_{(a)} = 0$ إذا و فقط إذا كان $f_{(x)}$ تقبل القسمة على $(x-a)$ ، و بالتالي $(x-a)$ عامل من عوامل $f_{(x)}$ .

## 7.1 : جذور كثيرة الحدود :

نقول أن العدد $r$ هو جذر أو صفر لكثيرة الحدود $f_{(x)}$إذا كان : $f_{(r)} = 0$

### نظرية :

إذا كانت $r_1, r_2, ..., r_n$ جذوراً حقيقية مختلفة لكثيرة الحدود $f_{(x)}$ فإن $f_{(x)}$ تقبل القسمة على $g_{(x)} = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)...(x-r_n)$ .

### نتيجة :

إذا كانت $f_{(x)}$ درجتها $n \geq 1$ فإن لها على الأكثر $n$ من الجذور الحقيقية المختلفة.

### الجذر المكرر :

نقول أن $a$ جذرًا مكررًا $m$ من المرات لكثيرة الحدود $f_{(x)}$ إذا و فقط إذا كان $f_{(x)}$ يمكن كتابتها على الصورة :

$f_{(x)} = (x-a)^m q_{(x)}$ حيث $q_{(a)} \neq 0$ . **وبعبارة أخرى** $(x-a)^m \| f(x)$ .

**وإذا كانت** $m = 1$ نقول أن $a$ جذر بسيط.

**مثال3 :**

إذا كانت $f_{(x)} = x^3 - 3x + 2$ فبين أن $a = 1$ جذر مكرر مرتين لكثيرة الحدود $f(x)$ ؟

**الحل:**

نلاحظ أنه يمكننا كتابة $f(x)$ على الصورة :

$$f(x) = (x-1)^2(x+2)$$

فمن تعريف الجذر المكرر نحصل على المطلوب.

## 8.1: النظرية الأساسية في الجبر:

أي كثيرة حدود $f_{(x)}$ درجتها $n>0$ لابد أن يكون لها جذر مركب واحد على الأقل .

### نتيجة:

أي كثيرة حدود $f_{(x)}$ درجتها $n>0$ لها بالضبط $n$ من الجذور المركبة.

"ليس من الضروري أن تكون الجذور مختلفة".

### نظرية :

إذا كان $r\in\mathbb{C}$ جذرا لكثيرة حدود $f_{(x)}$ فإن $\bar{r}$ أيضا هو جذر لكثيرة الحدود نفسها.

### نتيجة:

إذا كانت $f_{(x)}$ كثيرة حدود درجتها $n$ عدد فردي فإن $f_{(x)}$ لابد أن يكون لها على الأقل جذر حقيقي واحد.

### طريقة هورنر:

لتكن $f(x)$ كثيرة حدود ، و يراد قسمتها على $x-a$ .

### المثال التالي يوضح الطريقة :

أوجد قسمة

$f_{(x)}=2x^3-4x^2+3x+6$

على $x-5$

| 5 | 2 | −4 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| | ↓ | 10 | 30 | 165 |
| ⊗ | 2 | 6 | 33 | 171 |

### توضيح طريقة هورنر:

1) نكتب معاملات كثيرة الحدود $f_{(x)}$ حسب قوى $x$ التنازلية وكتابة صفر في حالة قوى $x$ غير الموجودة وتكتب 5 في أقصى اليسار.
2) نكتب معامل $x^3$ في بداية الصف الثالث وهو 2 .
3) نضرب المعامل 5 في 2 وهو $(5\times2=10)$ ونكتب الناتج 10 في أول الصف الثاني
4) نوجد حاصل الجمع وهو 6 ونكتبه في أول خانة في الصف الثالث.
5) نكرر الخطوات السابقة $(5\times6=30)$ ...بالترتيب.

$$\underbrace{2x^3-4x^2+3x+6}_{f(x)}=\underbrace{(x-5)}_{x-a}\underbrace{(2x^2+6x+33)}_{q(x)}+\underbrace{171}_{r}$$

### 9.1 : علاقة معاملات كثيرة الحدود بجذورها :

إذا كانت كثيرة الحدود $f(x) = x^2 + ax + b$ لها الجذران $\alpha, \beta$ فإن

$$x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$$
$$= x^2 - (\alpha+\beta)x + (\alpha\beta)$$

فإن :

$$\alpha + \beta = -a$$
$$\alpha\beta = b$$

بالمثل في حالة الدرجة الثالثة ، إذا كان $\alpha, \beta, \gamma$ جذور كثيرة الحدود $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ فإن :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$= x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$$

فإن :

$$\alpha+\beta+\gamma = -a$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = b$$
$$\alpha\beta\gamma = -c$$

**و بصفة عامة :**

إذا كان $r_1, r_2, \dots, r_n$ جذور لكثيرة الحدود $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$ فإن :

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = -a_{n-1}$$ ( $-a_{n-1}$ = مجموع الجذور لكثيرة الحدود ).

$$\sum_{1\le i<j\le n} r_ir_j = r_1r_2 + r_1r_3 + \dots + r_{n-1}r_n = a_{n-2}$$ ( $-a_{n-2}$= مجموع حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى).

وهكذا...

$$r_1r_2\dots r_n = (-1)^n a_0$$ ( $(-1)^n a_0$=حاصل ضرب جميع الجذور).

تعتبر هذه أهم الخواص التي نحتاجها غالبا، ويمكن بصورة عامة حساب المعاملات لكل $i = 0,1,2,\dots,n$ بالشكل:

$$r_1r_2r_3\dots r_i + r_1r_2r_4\dots r_{i+1} + \dots + r_{n-i+1}\dots r_{n-2}r_{n-1}r_n = (-1)^i a_{n-i}$$ ( $(-1)^i a_{n-i}$ =مجموع حاصل ضرب الجذور مأخوذة راءا راء).

**بعض الحقائق المهمة عن كثيرات الحدود :**

- ✓ الحد الثابت لكثيرة الحدود هو: $f(0)$ أي أن : $f(0) = a_0$ .
- ✓ مجموع المعاملات هو: $f(1)$ أي أن: $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .
- ✓ المجموع المتناوب للمعاملات هو: $f(-1)$ أي أن: $f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n$ .

أخي المتدرب : نشاط رقم 6 التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) ليكن $a,b$ عددين صحيحين بحيث أن: $x^2-x-1$ عامل لـــ: $ax^3+bx^2+1$ فما هي قيمة $b$ ؟

02) إذا كان $r_1,r_2,r_3$ أعداد تحقق أن :

$$r_1+r_2+r_3=17$$
$$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=11$$
$$r_1r_2r_3=-8$$

كوِّن كثيرة حدود واحدية من الدرجة الثالثة جذورها $r_1,r_2,r_3$؟

**مثال 1:**

ليكن $a,b$ عددين صحيحين بحيث أن: $x^2-x-1$ عامل لــ: $ax^3+bx^2+1$ فما هي قيمة $b$ ؟

**الحل:**

من خوارزمية القسمة عند قسمة $ax^3+bx^2+1$ على $x^2-x-1$ نجد أن:

$$ax^3+bx^2+1=\left(ax+\left(a+b\right)\right)\left(x^2-x-1\right)+\left(2a+b\right)x+\left(a+b+1\right)$$

أي أن الباقي هو: $\left(2a+b\right)x+\left(a+b+1\right)$

لكن $x^2-x-1$ عامل لــ: $ax^3+bx^2+1$ لذا فإن باقي القسمة هو الصفر.

أي أن $2a+b=0, a+b+1=0$

بحل النظام السابق نجد أن

$$2a+b=0\Rightarrow b=-2a\Rightarrow a-2a+1=0\Rightarrow a=1\Rightarrow \boxed{b=-2}$$

**مثال 2:**

إذا كان $r_1,r_2,r_3$ أعداد تحقق أن :

$$r_1+r_2+r_3=17$$
$$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=11$$
$$r_1r_2r_3=-8$$

كوّن كثيرة حدود واحدية من الدرجة الثالثة جذورها $r_1,r_2,r_3$؟

**الحل :**

لتكن $f_{(x)}$ هي كثيرة الحدود المطلوبة

فمن تعريف كثيرة الحدود الواحدية تكون: $\boxed{f_{(x)}=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0}$

من خواص علاقة جذور كثيرة الحدود بمعاملاتها ولكون كثيرة الحدود المطلوبة $f_{(x)}$ من الدرجة الثالثة نجد أن:

$$a_2=-(r_1+r_2+r_3)=-17,$$
$$a_1=r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=11,$$
$$a_0=(-1)^3(r_1r_2r_3)=8$$

إذن كثيرة الحدود $f_{(x)}$ المطلوبة هي:

$$f_{(x)}=x^3-17x^2+11x+8$$

أخي المتدرب : نشاط رقم 7 التاريخ / / 1430 هـ

استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :

ما هو معامل $x^7$ في مفكوك كثيرة الحدود $\left(1+2x-x^2\right)^4$ ؟

**مثال 3:**

ما هو معامل $x^7$ في مفكوك كثيرة الحدود $\left(1+2x-x^2\right)^4$ ؟

**الحل:**

$$\because \quad \left(1+2x-x^2\right)^4=\left(1+2x-x^2\right)\left(1+2x-x^2\right)\left(1+2x-x^2\right)\left(1+2x-x^2\right)$$

أكبر قوة لـــ $x$ هي $x^8$ الناتجة من اختيار $-x^2$ من كل عامل من العوامل الأربعة.

لإيجاد الحد $x$ نحتاج لأخذ $-x^2$ من ثلاثة عوامل واختيار $2x$ من العامل الرابع ونلاحظ أنه توجد أربع طرق لعمل هذا الاختيار

لذا فإن الحد المتضمن $x^7$ في المفكوك هو $4\left(2x\right)\left(-x^2\right)^3=-8x^7$ ،وبالتالي فإن عامل $x^7=\boxed{-8}$ في المفكوك.

ثانيا:

من نظرية ذات الحدين:

$$\left(1+2x-x^2\right)^4=\left(\left(1+2x\right)+\left(-x^2\right)\right)^4$$
$$=\left(1+2x\right)^4+4\left(1+2x\right)^3\left(-x^2\right)+6\left(1+2x\right)^2\left(-x^2\right)^2+4\left(1+2x\right)\left(-x^2\right)^3+\left(-x^2\right)^4$$

نلاحظ أن المقدار $4\left(1+2x\right)\left(-x^2\right)^3$ فقط لديه حد لـــ $x^7$ وبالتالي فإن عامل $x^7=\boxed{-8}$ في المفكوك.

ثالثا:

من خلال العلاقة بين جذور كثيرة الحدود ومعاملاتها نجد أن: $f(x)=\left(1+2x-x^2\right)^4$

معاملات $x^7$ في كثيرة الحدود من الدرجة الثامنة هي النظير الجمعي لجذور كثيرة الحدود لأن $\boxed{\sum_{i=1}^{n} r_i=-a_{n-1}}$

$$f(x)=\left(1+2x-x^2\right)^4=\left(x^2-2x-1\right)^4 \qquad (؟)$$

$\because$ مجموع جذور كثير الحدود $f(x)=\left(1+2x-x^2\right)^4$ هو 4 ×(مجموع جذور كثيرة الحدود $h(x)=1+2x-x^2$).

لكن مجموع جذور كثيرة الحدود $h(x)=1+2x-x^2$ هو 2 من علاقة المعاملات بالجذور.

$\therefore$ مجموع جذور كثير الحدود $f(x)=\left(1+2x-x^2\right)^4$ هو $8=4\left(2\right)$

وبالتالي فإن عامل $x^7=\boxed{-8}$ في المفكوك.

أخي المتدرب : نشاط رقم **8** التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) أوجد حاصل ضرب الجذور الحقيقي للمعادلة: $x^2+18x+30=2.\sqrt{x^2+18x+45}$ ؟.

02) لدينا الدالة $f$ لديها الخاصية التالية لجميع الأعداد الحقيقية غير الصفرية $f_{(x)}+2f_{(\frac{1}{x})}=3x$

كم عدد الحلول غير الصفرية للمعادلة $f_{(x)}=f_{(-x)}$ إن وجدت؟.

**مثال 4:**

أوجد حاصل ضرب الجذور الحقيقي للمعادلة:

$x^2+18x+30=2.\sqrt{x^2+18x+45}$ ؟.

**الحل :**

لنعتبر أن : $y=\sqrt{x^2+18x+45}$ مما يعني أن $y\geq 0$ .

المعادلة المعطاة تصبح:

$$y^2-15=2y \Rightarrow y^2-2y-15=0 \Rightarrow (y-5)(y+3)=0$$

وعليه فإن: $y=5$ أو $y=-3$ مرفوض لأن $y\geq 0$ .

إذن $y=5$ ، وبالتعويض في المعادل الأصلية نجد أن:

$$x^2+18x+30=2(5) \Rightarrow x^2+18x+20=0$$

من قانون حل معادلة الدرجة الثانية نجد أن: $b^2-4ac=(18)^2-4\times1\times20=244\succ 0$

وبالتالي للمعادلة الأخيرة جذران حقيقيان (وهما الجذران الحقيقيان للمعادلة الأساسية)ومن علاقة الجذور بالمعاملات لكثيرة الحدود نجد أ، حصل ضرب جذريهما هو يساوي 20 .

**مثال5 :**

لدينا الدالة $f$ لديها الخاصية التالية لجميع الأعداد الحقيقية غير الصفرية $f_{(x)}+2f_{(\frac{1}{x})}=3x$

كم عدد الحلول غير الصفرية للمعادلة $f_{(x)}=f_{(-x)}$ إن وجدت؟.

**الحل :**

نحتاج لطريقة ما لحساب الحد $f_{(\frac{1}{x})}$ من المعادلة التي تصف $f_{(x)}$ .

إن استطعنا إيجاد المعادلة التي تصف $f_{(x)}$ سنتمكن من المقارنة بين كل من $f_{(x)};f_{(-x)}$ .

لنحاول التعويض بـــ $\frac{1}{x}$ بدلا من $x$ المعادلة المعطاة $\boxed{f_{(x)}+2f_{(\frac{1}{x})}=3x}$ من أجل الحصول على تبسيط إن أمكن:

$$f_{(\frac{1}{x})}+2f_{(x)}=3\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Rightarrow f_{(\frac{1}{x})}=\frac{3}{x}-2f_{(x)}$$

وبالتعويض في المعادلة الأساسية نحصل على:

$$f_{(x)}+2.\left(\frac{3}{x}-2f_{(x)}\right)=3x \quad \Rightarrow -3f_{(x)}+\frac{6}{x}=3x \quad \Rightarrow f_{(x)}=-\frac{1}{3}.\left(3x-\frac{6}{x}\right)=-x+\frac{2}{x} \Rightarrow \boxed{f_{(x)}=\frac{2-x^2}{x}}$$

إذا كانت $f_{(x)}=f_{(-x)}$ بحيث $x\neq 0$ فإن:

$$f_{(x)}=f_{(-x)} \Rightarrow \quad \frac{2-x^2}{x}=\frac{2-(-x)^2}{(-x)}$$

$$\Rightarrow 2x-x^3=-2x+x^3 \Rightarrow 2x^3-4x=0 \Rightarrow 2x\left(x^2-2\right)=0$$

إذن فالحلول غير الصفرية للمعادلة هي $x=\pm\sqrt{2}$ وبالتالي فإن عددها هو: $\boxed{2}$ .

أخي المتدرب : نشاط رقم **9** التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) لتكن $f(x)=x^3$ والمطلوب إيجاد جميع قيم $x$ الحقيقية التي تحقق: $f(x^2+1)=(f(x))^2+1$ ؟.

02) بالاستفادة من كثيرات الحدود أعد حل المثال: حلل المقدار $a^3+b^3+c^3-3abc$ ؟.

**مثال6 :**

لتكن $f_{(x)}=x^{3}$ والمطلوب إيجاد جميع قيم $x$ الحقيقية التي تحقق: $f_{(x^{2}+1)}=\left(f_{(x)}\right)^{2}+1$.

**الحل :**

الحل ببساطة بتمييز مفهوم الدالة وتطبيقها بشكل صحيح

$$f_{(x^{2}+1)}=\left(x^{2}+1\right)^{3}=\left(x^{2}\right)^{3}+3\left(x^{2}\right)^{2}+3\left(x^{2}\right)+1=x^{6}+3x^{4}+3x^{2}+1$$

$$\left(f_{(x)}\right)^{2}+1=\left(x^{3}\right)^{2}+1=x^{6}+1$$

لذا نحتاج لأن نعين كم عدد حقيقي $x$ يحقق: $x^{6}+3x^{4}+3x^{2}+1=x^{6}+1\Rightarrow 0=3x^{4}+3x^{2}=3x^{2}\left(x^{2}+1\right)$

يوجد حل حقيقي واحد للمعادلة هو : $\boxed{x=0}$ .

**مثال7 :**

بالاستفادة من كثيرات الحدود أعد حل المثال:

حلل المقدار $a^{3}+b^{3}+c^{3}-3abc$ ؟.

**الحل :**

لتكن $f$ كثيرة حدود لها الجذور $a,b,c$ :

$$f_{(x)}=x^{3}-(a+b+c).x^{2}+(ab+bc+ca).x-abc$$

لكن $a,b,c$ جذور لكثيرة الحدود $f$ وبالتالي فهي تحقق $f_{(x)}=0$ أي أن $f_{(a)}=f_{(b)}=f_{(c)}=0$ وبالتالي:

$$a^{3}-(a+b+c).a^{2}+(ab+bc+ca).a-abc=0$$
$$b^{3}-(a+b+c).b^{2}+(ab+bc+ca).b-abc=0$$
$$c^{3}-(a+b+c).c^{2}+(ab+bc+ca).c-abc=0$$

بجمع المعادلات السابقة نحصل على:

$$a^{3}+b^{3}+c^{3}-(a+b+c).(a^{2}+b^{2}+c^{2})+(ab+bc+ca).(a+b+c)-3abc=0$$
$$\Rightarrow a^{3}+b^{3}+c^{3}-3abc=(a+b+c).(a^{2}+b^{2}+c^{2})-(ab+bc+ca).(a+b+c)$$
$$=(a+b+c).(a^{2}+b^{2}+c^{2}-ab-bc-ca)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^{2}+(b-c)^{2}+(c-a)^{2}) \qquad (?)$$

**ملاحظة:**

إذا كانت $a+b+c=0$ فإن: $a^{3}+b^{3}+c^{3}=3abc$

أخي المتدرب : نشاط رقم **10** التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

أوجد الشرط اللازم والكافي لمعاملات كثيرة الحدود $f_{(x)} = ax^2 + bx + c$ ليكون مربع أحد جذريها مساو للجذر الآخر(الثاني) ؟.

**مثال8 :**

أوجد الشرط اللازم والكافي لمعاملات كثيرة الحدود $f_{(x)}=ax^2+bx+c$ ليكون مربع أحد جذريها مساو للجذر الآخر(الثاني) ؟.

**الحل :**

ليكن جذري $f_{(x)}=ax^2+bx+c$ هما $r,s$

أحد الجذرين مربع للآخر $\Leftrightarrow$ $0=(r-s^2)(r^2-s)=r^3+s^3-rs-r^2s^2$

لكن من علاقة المعاملات بالجذور فإن: $rs=\frac{c}{a}$ ; $r+s=-\frac{b}{a}$ ، كما أن $r^3+s^3=(r+s)^3-3rs(r+s)$ ، وبالتالي:

$$0=(r-s^2)(r^2-s)=r^3+s^3-rs-r^2s^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0=\left[(-\frac{b}{a})^3-3(\frac{c}{a})(-\frac{b}{a})-\frac{c}{a}-\frac{c^2}{a^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad 0=-\frac{b^3}{a^3}-3(-\frac{bc}{a^2})-\frac{c}{a}-\frac{c^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0=-\frac{1}{a^3}\times\left[b^3-3abc+a^2c+ac^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{b^3-3abc+a^2c+ac^2=0}$$

**حل آخر؛**

ليكن جذري $f_{(x)}=ax^2+bx+c$ هما $r,r^2$ .

وبالتالي: $r+r^2=-\frac{b}{a} \Leftarrow ar^2+ar+b=0$ ، وهذا يعني أن $r$ جذر للمعادلتين:

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ ax^2+ax+b=0 \end{cases}$$ وبالتالي: $(b-a)r=b-c$

إذا كان $a=b$ فإن $b=c$ وكذلك $r$ جذر لكثيرة الحدود $x^2+x+1=0$ (ويكون $r,r^2$ هما $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ؛ $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ على التوالي).

إذا كان $a\neq b$ فإن: $r=\frac{b-c}{b-a}$ وبالتالي:

$$ar^2+ar+b=0 \quad \Rightarrow a\left(\frac{b-c}{b-a}\right)^2+a\left(\frac{b-c}{b-a}\right)+b=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(b-a)^2}\times\left[a(b-c)^2+a(b-a)(b-c)+b(b-a)^2\right]=0$$

$$\Rightarrow ab^2+ac^2-2abc+ab^2-a^2b-abc+a^2c+b^3+ba^2-2ab^2=0$$

$$\Rightarrow b^3+a^2c+ac^2-3abc=0$$

(نلاحظ أن العلاقة الأخيرة متحققة عندما $a=b=c$).

لنعتبر أن $r,s$ هما جذرا المعادلة $ax^2+bx+c=0$ بحيث $b^3+a^2c+ac^2-3abc=0$

وبالتالي من علاقة المعاملات بالجذور نج أن: $rs=\frac{c}{a}\Rightarrow c=ars$ ; $r+s=-\frac{b}{a}\Rightarrow b=-a(r+s)$ ،وبالتالي:

$$b^3+a^2c+ac^2-3abc=0 \Rightarrow (-a(r+s))^3+a^3rs+a^3r^2s^2-3a(-a(r+s))ars=0$$
$$\Rightarrow -a^3(r+s)^3+a^3rs+a^3r^2s^2+3a^3(r+s)rs=0$$
$$\Rightarrow -(r+s)^3+rs+r^2s^2+3(r+s)rs=0$$
$$\Rightarrow rs+r^2s^2-r^3-s^3=0$$
$$\Rightarrow rs+r^2s^2-r^3-s^3=0$$
$$\Rightarrow r(s-r^2)-s^2(s-r^2)=0$$
$$\Rightarrow (r-s^2)(s-r^2)=0$$

إما $r=s^2$ أو $s=r^2$ وبهذا يتم المطلوب.

## 10.1 :الأسس واللوغاريتمات

### قوانين الأسس

إذا كانت $a,b$ أعداد حقيقية موجبة كانت $x,y$ أعداد حقيقية:

$$a^x . a^y = a^{x+y}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y \quad ; a \neq 1$$

$$a^x = b^x \Leftrightarrow a = b \quad ; a \neq 0$$

$$a^o = 1 \; ; a \neq 0$$

### قوانين الجذور

إذا كانت $x,y$ أعداد حقيقية غير سالبة:

$$\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}} \qquad ; y \neq 0$$

$$\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \qquad ; y \neq 0$$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = x^{\frac{n}{m}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$$

$$\left(\sqrt{x^m}\right)^n = \left(\sqrt{x^n}\right)^m = \left(\sqrt{x}\right)^{nm}$$

طريقة أبو كامل المصري لجمع الجذور:

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \sqrt{x + y \pm 2\sqrt{xy}}$$

### قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت $a,x,y$ أعداد حقيقية موجبة بحيث $a \neq 1$ فإن:

$$\log_a x = y \iff x = a^y$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^{\beta} = \beta \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad ; b \succ 0, b \neq 1$$

$$a^{\log_a x} = x \quad ; \quad \log_a a^x = x$$

$$\log_{a^{\beta}} x = \frac{1}{\beta} \log_a x$$

$$\log_a b \log_b a = 1 \quad ; a,b \succ 0 \quad ; a \neq 1, b \neq 1$$

$$\log_a x = \log_a y \iff x = y$$

$$\log_a 1 = 0 \quad ; \quad \log_a a = 1$$

إذا كان الأساس $a = 10$ فإننا نكتب $\log$ بدلا من $\log_{10}$ .

وبالمثل إذا كان الأساس $a = e$ فإننا نكتب $\ln$ بدلا من $\log_e$ .

حيث $e$ هو العدد النبيري كما سبق دراسته.

أخي المتدرب : نشاط رقم **11** التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) اختصر المقدار لأبسط صورة: $\frac{60^{2x}\times\sqrt{0.01}}{0.001\times100^{x-1}\times(\sqrt{6})^{4x}}$ ؟.

02) إذا كانت $N\succ1$ فأوجد قيمة المقدار $\sqrt[3]{N\sqrt[3]{N\sqrt[3]{N}}}$ ؟.

03) حل المعادلة $\log_5(x+1)-2=\log_5(x-1)$ ؟.

**مثال1 :**

اختصر المقدار لأبسط صورة: $\dfrac{60^{2x}\times\sqrt{0.01}}{0.001\times100^{x-1}\times(\sqrt{6})^{4x}}$ ؟.

**الحل :**

$$\frac{60^{2x}\times\sqrt{0.01}}{0.001\times100^{x-1}\times(\sqrt{6})^{4x}}=\frac{(2\times3\times10)^{2x}\times\sqrt{10^{-2}}}{10^{-3}\times(10^{2})^{x-1}\times((\sqrt{2\times3})^{2})^{2x}}$$
$$=\frac{2^{2x}\times3^{2x}\times10^{2x}\times10^{-1}}{10^{-3}\times(10^{2x-2}\times(2\times3)^{2x}}$$
$$=\frac{2^{2x}\times3^{2x}\times10^{2x}\times10^{-1}}{10^{-3}\times(10^{2x-2}\times2^{2x}\times3^{2x}}=10^{2x-1+3-2x+2}=10^{4}=10000$$

**مثال2 :**

إذا كانت $N\succ1$ فأوجد قيمة المقدار $\sqrt[3]{N\sqrt[3]{N\sqrt[3]{N}}}$ ؟.

**الحل :**

$$\sqrt[3]{N\sqrt[3]{N\sqrt[3]{N}}}=\left(N\left(N\left(N^{\frac{1}{3}}\right)\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}=N^{\frac{1}{3}}N^{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}N^{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}$$
$$=N^{\frac{1}{3}}N^{\frac{1}{9}}N^{\frac{1}{27}}$$
$$=N^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}}=\boxed{N^{\frac{13}{27}}}$$

**مثال3 :**

حل المعادلة $\log_5(x+1)-2=\log_5(x-1)$ ؟.

**الحل :**

$$\log_5(x+1)-2=\log_5(x-1)\Rightarrow\log_5(x+1)-\log_5(x-1)=2$$
$$\Rightarrow\log_5\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2$$
$$\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}=5^{2}$$
$$\Rightarrow25(x-1)=x+1$$
$$\Rightarrow25x-25=x+1$$
$$\Rightarrow24x=26\Rightarrow x=\frac{26}{24}=\frac{13}{12}$$

## 11.1: المتتابعات والمتسلسلات Sequences and Series

### تعريف:

المتتالية هي دالة $f$ مجالها مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ومداها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. ويسمى : $f_{(n)}=a_n$ بالحد النوني للمتتالية ، $n \in \mathbb{N}$ ، وعناصرها تسمى حدود المتتالية. وهناك متتابعات منتهية $f:\{1,2,3,...,n\}\to\mathbb{R}$ . ومتتابعات غير منتهية $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ .

المتتالية الحسابية:

نقول أن $\{a_n\}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد ثابت $d$ بحيث $d=a_{n+1}-a_n$، لجميع قيم $n$ وتسمى $d$ أساس المتتالية .

### ملاحظات :

- الحد النوني للمتتالية الحسابية هو : $a_n=a_1+(n-1).d$، حيث $a_1$ هو الحد الأول ، $d$ هو الأساس (الفرق العام).
- الأوساط الحسابية بين العددين $a,b$ هي حدود المتتالية التي حدها الأول $a$ وحدها الأخير $b$ .

المتتالية الهندسية:

نقول أن $\{a_n\}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد ثابت $r$ بحيث $r=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ، لجميع قيم $n$ وتسمى $r$ أساس المتابعة .

ملاحظات :

- الحد النوني للمتتالية الهندسية هو : $a_n=a.r^{n-1}$، حيث $a$ هو الحد الأول ، $r$ هو الأساس .
- الأوساط الهندسية بين العددين $a,b$ هي حدود المتتالية التي حدها الأول $a$ وحدها الأخير $b$ .
- إذا كانت الأعداد $a,b,c$ في تتابع هندسي فإن $b$ يسمى الوسط الهندسي حيث : $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\to b=\pm\sqrt{a.c}$.

المتسلسلة:

إذا كانت $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ أو $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ حدود أي متتالية فإن المجموع $a_1+a_2+a_3+...+a_n$ أو $\sum_{k=1}^{n}a_k$ يدعى متسلسلة منتهية، إذا كانت $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$ أو $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ حدود أي متتالية فإن المجموع $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ أو $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ يدعى متسلسلة غير منتهية،

ملاحظات :

- مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية: $\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(2a_1+(n-1).d)}{2}}$، حيث $a_1$ هو الحد الأول ، $d$ هو الأساس (الفرق العام) .
- مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية: $\boxed{S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1},r\neq1\ ;\ S_n=n.a\ ,r=1}$، حيث $a$ هو الحد الأول ، $r$ هو الأساس .
- مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية: $\boxed{S_n=\frac{a}{1-r}\ ,|r|\prec1}$، حيث $a$ هو الحد الأول ، $r$ هو الأساس .

أخي المتدرب : نشاط رقم **12** التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) المتتالية $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{200}$ معرفة بالعلاقة: $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ أوجد قيمة المقدار $a_{99}a_{100}a_{101}a_{102}a_{103}$ ؟.

02) أوجد قيمة مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{1000} a_n$ إذا كان الحد العام للمتتالية المرافقة للمتسلسلة هو: $a_n = (-1)^n \times n$ ؟.

**تذكر:**

حساب مجمع متسلسلة هندسية منتهية $S_n$ :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}$$

$$\Rightarrow rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ... + ar^n \quad ; ar^{n-1} \times r = ar^{n-1+1} = ar^n$$

$$\Rightarrow S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

كما أنه نحتاج أحيانا لمتسلسلة جزئية من متسلسلة ما فدليل المتسلسلة لا يؤثر عليها:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} = \sum_{m=9}^{\infty} a_{m-8}$$

**مثال1 :**

المتتالية $a_1, a_2, a_3, ..., a_{200}$ معرفة بالعلاقة: $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ أوجد قيمة المقدار $a_{99}a_{100}a_{101}a_{102}a_{103}$ ؟.

**الحل :**

$$a_{99}a_{100}a_{101}a_{102}a_{103} = \frac{101}{100} \times \frac{102}{101} \times \frac{103}{102} \times \frac{104}{103} \times \frac{105}{104} = \frac{105}{100} = 1.05$$

**مثال2 :**

أوجد قيمة مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{1000} a_n$ إذا كان الحد العام للمتتالية المرافقة للمتسلسلة هو: $a_n = (-1)^n \times n$ ؟.

**الحل :**

$$\sum_{n=1}^{1000} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1000}$$

لكن $a_1 = (-1)^1 \times 1 = -1, a_2 = (-1)^2 \times 2 = 2 \Rightarrow a_1 + a_2 = -1 + 2 = 1$

كما أن $a_3 = (-1)^3 \times 3 = -3, a_4 = (-1)^4 \times 4 = 4 \Rightarrow a_3 + a_4 = -3 + 4 = 1$

وبالمثل مجموع كل حدين متتاليين هو 1 لأنه بصفة عامة:

$$a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} \times (2n-1) = -(2n-1) = 1 - 2n, a_{2n} = (-1)^{2n} \times 2n = 2n$$

$$\Rightarrow a_{2n-1} + a_{2n} = -1 + 2 = 1 - 2n + 2n = 1$$

$$\sum_{n=1}^{1000} a_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + ... + (a_{999} + a_{1000})$$

$$= \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{500 times} = 500 \times 1 = 500$$

لأننا جزئنا الحدود مثنى مثنى فيكون عدد المجموعات الحدود الجديدة هو: $\dfrac{1000}{2} = 500$

أخي المتدرب : نشاط رقم **13** التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) إذا كانت $a,b,c$ متتالية حسابية فبرهن أن $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ متتالية حسابية على الترتيب ؟.

02) عند ترقيم المنازل على شارع أخذت الأرقام من 1 إلى 49 ، بين أنه يوجد مترل رقمه $x$ بحيث أن مجموع أرقام المنازل التي قبله يساوي مجموع أرقام المنازل التي بعده، وأوجد قيمة $x$ ؟.

**مثال3 :**

إذا كانت $a,b,c$ متتالية حسابية فبرهن أن $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ متتالية حسابية على الترتيب ؟

**الحل :**

بما أن $a,b,c$ متتالية حسابية فإن: $b-a=c-b$

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(c-a)(a-b)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\frac{(\sqrt{c}-\sqrt{b})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{a})}{(b-c)(c-a)}$$

$$\because a-b=b-c$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$

أي أن $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ متتالية حسابية.

**مثال4 :**

عند ترقيم المنازل على شارع أخذت الأرقام من 1 إلى 49 ، بين أنه يوجد مترل رقمه $x$ بحيث أن مجموع أرقام المنازل التي قبله يساوي مجموع أرقام المنازل التي بعده، وأوجد قيمة $x$ ؟.

**الحل :**

بما أن أرقام المنازل من 1 إلى $x-1$ ومن $x+1$ إلى 49 تمثل متتالية حسابية فإن مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية المرافقة لها هو: $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ وبالتالي فإن:

مجموع أرقام المنازل عن يسار المترل $x$ هو؛ $S_l=\frac{(x-1)x}{2}$

كم أن مجموع أرقام المنازل عن يمين المترل $x$ هو: $S_r=\frac{(49-x)(50+x)}{2}$

وإذا تساوى المجموعين نحصل على:

$$S_r=S_l\Rightarrow\frac{(x-1)x}{2}=\frac{(49-x)(50+x)}{2}$$
$$\Rightarrow(x-1)x=(49-x)(50+x)$$
$$\Rightarrow x^2-x=2450-x-x^2$$
$$\Rightarrow x^2=2450\Rightarrow x^2=1225\Rightarrow\boxed{x=35}$$

**بعض القوانين المتعلقة با لمجاميع :**

$$1)\quad \sum_{i=1}^{n} k a_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$2)\quad \sum_{i=1}^{n} k = nk$$

$$3)\quad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$4)\quad (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{n} b_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j$$

$$5)\quad \sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$6)\quad \sum_{n=1}^{k} n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$7)\quad \sum_{n=1}^{k} n^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

### 12.1 : التلسكوبيان *Telescopin*

الاستعانة في المسألة بنوع من الجمع يمكن التعامل معه بسهولة عند وضع الحدود بالشكل $\boxed{a_i - a_{i+1}}$ وجمعهم هو:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) = a_1 - a_n}$$

هذا النوع من الجمع يسمى الجمع التلسكوبي.وبالمثل يوجد ضرب تلسكوبي حيث تكون المعاملات بالشكل $\boxed{\frac{a_i}{a_{i+1}}}$ وحاصل ضربهم هو: $\boxed{\prod_{i=1}^{n} A_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{a_1}{a_n}}$ .

أخي المتدرب : نشاط رقم **14**

التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) أوجد المجموع $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ؟

02) .أثبت صحة العلاقة: $\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k! = n(n+1)!$ ؟.

**مثال**1 **:**

أوجد المجموع $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ؟.

**الحل :**

نلاحظ أن المجموع يمكن التعبير عنه بالشكل:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

لكن

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

فيصبح المجموع بالشكل:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{n+1}-\sqrt{1}=\sqrt{n+1}-1$$

**مثال**2 **:**

أثبت صحة العلاقة: $\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k!=n(n+1)!$ ؟.

**الحل :**

بالاستفادة من تلسكوبيان الجمع نجد أن:

$$\begin{aligned}
a_k &= (k^2+1).k!=(k^2+k-k+1).k!\\
&=((k^2+k)-(k-1)).k!\\
&=(k^2+k).k!-(k-1)k!\\
&=k.(k+1).k!-(k-1).k!\\
&=((k+1)-1).(k+1)!-(k-1).k!\\
&=k.(k+1)!-(k-1).k!\\
&=b_{k+1}-b_k \qquad ;\boxed{b_k=(k-1).k!}
\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}a_k &= \sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k!\\
&=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k) \qquad ;\boxed{b_k=(k-1)k!}\\
&=\sum_{k=1}^{n}(k.(k+1)!-(k-1).k!)\\
&=(1.(2!)!-(0)(1!))+(2.(3!)!-(1)(2!))+\ldots+(n.(n+1)!-(n-1).n!)\\
&=n.(n+1)!-(0)(1!)\\
&=n.(n+1)!
\end{aligned}$$

أخي المتدرب : نشاط رقم 15 التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) أوجد العدد الصحيح $(\log_2 3)\cdot(\log_3 4)\cdot(\log_4 5)\cdots(\log_{1023} 1024)$ ؟.

02) أوجد العددين $a,b$ بحيث : $(2+1).(2^2+1).(2^{2^2}+1).(2^{2^3}+1)...(2^{2^{99}}+1)=2^a+b$ ؟.

**مثال**3 :

أوجد العدد الصحيح $(\log_2 3)\cdot(\log_3 4)\cdot(\log_4 5)\cdots(\log_{1023} 1024)$ ؟.

**الحل :**

$$\because \quad \boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad ; b \succ 0, b \neq 1}$$

ليكن $(a \succ 0, a \neq 1)$ وبالاستفادة من العلاقة السابقة نجد أن:

$$\log_k (k+1) = \frac{\log_a (k+1)}{\log_a k} \qquad ; k = 2,3,\ldots,1023$$

وبالتالي:

$$\prod_{k=2}^{1023}\left(\log_k (k+1)\right) = \prod_{k=2}^{1023}\frac{\log_a (k+1)}{\log_a k}$$

$$= \frac{\log_a 3}{\log_a 2}\times\frac{\log_a 4}{\log_a 3}\times\frac{\log_a 5}{\log_a 4}\times\ldots\times\frac{\log_a 1024}{\log_a 1023} = \frac{\log_a 1024}{\log_a 2} = \log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10$$

**مثال**4 :

أوجد العددين $a,b$ بحيث : $(2+1).(2^2+1).(2^{2^2}+1).(2^{2^3}+1)\ldots(2^{2^{99}}+1) = 2^a + b$ ؟.

**الحل :**

ليكن $A = (2+1).(2^2+1).(2^{2^2}+1).(2^{2^3}+1)\ldots(2^{2^{99}}+1)$ وبالاستفادة من تحليل فرق مربعين $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

نلاحظ أن:

$$(2-1).A = (2-1).(2+1).(2^2+1).(2^{2^2}+1).(2^{2^3}+1)\ldots(2^{2^{99}}+1)$$

$$= \underbrace{(2-1).(2+1)}.(2^2+1).(2^{2^2}+1).(2^{2^3}+1)\ldots(2^{2^{99}}+1)$$

$$= \underbrace{(2^2-1).(2^2+1)}.(2^{2^2}+1).(2^{2^3}+1)\ldots(2^{2^{99}}+1)$$

$$= (2^{2^2}-1).(2^{2^2}+1).(2^{2^3}+1)\ldots(2^{2^{99}}+1)$$

$$= (2^{2^3}-1).(2^{2^3}+1)(2^{2^4}+1)\ldots(2^{2^{99}}+1)$$

$$\vdots$$

$$= (2^{2^{99}}-1)(2^{2^{99}}+1)$$

$$= (2^{2^{100}}-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 2^{2^{100}} - 1} \Rightarrow a = 2^{100} \quad , \quad b = -1$$

## 13.1: الكسور الجزئية Partial Fractions

نعلم أنه إذا أردنا جمع كسرين فأكثر فيهم مجاهيل فإننا نقوم بتوحيد المقامات كخطوة أساس ، و من ثم نقوم بجمع الحدود المتشابهة في البسط .

لكن في تجزئة الكسور نقوم بعملية عكسية ، أي أننا نحلل الكسر إلى عوامله الأولية ( سواء كانت خطية أو تربيعية ) وسنقوم بعرض فكرة الكسور الجزئية من خلال الأمثلة التالية .

**مثال 1 :**

جزء الكسر التالي : $\dfrac{13x-27}{x^2-3x-4}$

**الحل :**

1- **نحلل المقام إلى عوامله الأولية :** $(x+1)(x-4)$

2- **نفرض أن :**

$$\frac{13x-27}{x^2-3x-4}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-4}$$

3- **نوحد المقامات :**

$$\frac{13x-27}{x^2-3x-4}=\frac{A(x-4)+B(x+1)}{(x+1)(x-4)}$$

4- **الآن المقام يساوي المقام ، إذًا البسط يساوي البسط :**

$$13x-27=A(x-4)+B(x+1)$$

5- **افرض قيم للمتغير $x$ بحيث تكون أصفار المقام :**

$$if \quad x=4 \Rightarrow 5B=52-27=25 \Rightarrow \boxed{B=5}$$

$$if \quad x=-1 \Rightarrow -5A=-27-13=-40 \Rightarrow \boxed{A=-1}$$

**و أخيرًا فإن :** $\dfrac{13x-27}{x^2-3x-4}=\dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{5}{x-4}$ .

أخي المتدرب : نشاط رقم **16** التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

جزء الكسر التالي : $\frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}$ ؟

**مثال2:**

جزء الكسر التالي : $\frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}$ ؟

**الحل:**

1- **نحلل المقام إلى عوامله الأولية :**

2- **نفرض أن :**

$$\frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-1}$$

3- **نوحد المقامات :**

$$\frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}=\frac{A(x+2)(x-1)+B(x)(x-1)+C(x)(x+2)}{(x)(x+2)(x-1)}$$

4- **الآن المقام يساوي المقام ، إذًا البسط يساوي البسط :**

$$4x^2-3x-4=A(x+2)(x-1)+B(x)(x-1)+C(x)(x+2)$$

5- **افرض قيم للمتغير $x$ بحيث تكون أصفار للمعادلة السابقة :**

$$if \quad x=0 \Rightarrow -2A=-4 \Rightarrow \boxed{A=2}$$
$$if \quad x=-2 \Rightarrow 6B=18 \Rightarrow \boxed{B=3}$$
$$if \quad x=1 \Rightarrow 3C=-3 \Rightarrow \boxed{C=-1}$$

**و أخيرًا فإن :** $\frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}=\frac{2}{x}+\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x-1}$ .

أخي المتدرب : نشاط رقم **17** التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) أوجد الحل الحقيقي للمعادلة $\sqrt{3-x} = 3-x^2$ ؟.

02) أوجد الحل الحقيقي للمعادلة $(x+y)^2 = (x+1)(y-1)$ ؟.

## 14.1: حل المعادلات مختلفة الدرجات

**مثال1 :**

أوجد الحل الحقيقي للمعادلة $\sqrt{3-x}=3-x^2$ ؟.

**الحل :**

بتربيع الطرفين للمعادلة $\sqrt{3-x}=3-x^2$ مع ملاحظة اختبار الحلول على الفترة $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ نجد أن:

$$3-x=9-6x^2+x^4 \Rightarrow \boxed{x^4-6x^2+x+6=0}$$

يمكن لنا أن نلاحظ أن تحليل المقدار السابق هو: $(x^2+x-3)(x^2-x-2)=0$

إما $x^2+x-3=0$ وبالتالي فإن : $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ وبالتالي فإن الحل المقبول هو: $x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$

أو $x^2-x-2=0$ وبالتالي فإن : $x=\dfrac{1\pm 3}{2}$ وبالتالي فإن الحل المقبول هو: $x=-1$

أي أن حل المعادلة الأساسية هو ؛ $-1,\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$ .

**ملاحظة هامة** ليس من السهل تحليل مثل هذا المقدار دائما لنعتبر $a\succ 0$ وأن $\sqrt{a-x}=a-x^2$

بتربيع الطرفين والتجميع نجد أن: $a-x=a^2-2ax^2+x^4 \Rightarrow x^4-2ax^2+x+a^2-a=0$

لنعتبر أننا نريد حل معادلة الدرجة الثانية في $a$ التالية $a^2-(2x^2+1)a+(x^4+x)=0$ حيث $x's$ أعداد حقيقية:

$$a=\frac{-(-(2x^2+1))\pm\sqrt{(2x^2+1)^2-4\times1\times(x^4+x)}}{2\times1}$$

$$\Rightarrow a=\frac{(2x^2+1)\pm(2x-1)}{2}$$

$$\Rightarrow a=x^2+x \ \vee a=x^2-x+1$$

$$\boxed{a^2-(2x^2+1)a+(x^4+x)=(a-x^2-x)(a-x^2+x-1)}$$

**مثال2 :**

أوجد الحل الحقيقي للمعادلة $(x+y)^2=(x+1)(y-1)$ ؟.

**الحل :**

لنضع $Y=y-1$ ; $X=x+1$ فتصبح المعادلة بالشكل:

$$(X+Y)^2=XY \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X^2+Y^2+(X+Y)^2\right]=0$$ (لماذا؟)

وبالتالي فإن: أي أن $X=Y=0$ (لماذا؟).

وبالتالي الحل الحقيقي للمعادلة هو: $x=1\ ; y=-1$

أخي المتدرب : نشاط رقم **18** التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) أوجد جميع الأعداد الحقيقية $x$ التي تحقق المعادلة: $2^x+3^x-4^x+6^x-9^x=1$ ؟.

02) أوجد الحل الحقيقي للمعادلة $\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\sqrt{\ldots+\sqrt{4^n x+3}}}}}-\sqrt{x}=1$ ؟.

**مثال3 :**

أوجد جميع الأعداد الحقيقية $x$ التي تحقق المعادلة: $2^x+3^x-4^x+6^x-9^x=1$ ؟.

**الحل :**

لنعتبر $a=2^x$ و $b=2^x$ فتصبح المعادلة:

$$2^x+3^x-4^x+6^x-9^x=1 \Rightarrow 2^x+3^x-(2^x)^2+2^x.3^x-(3^x)^2=1$$
$$\Rightarrow a+b-a^2+ab-b^2=1 \Rightarrow 1+a^2+b^2-a-b-ab=0$$

بضرب جميع حدود المعادلة الأخيرة والتجميع المناسب لإكمال المربع نحصل على:

$$2+2a^2+2b^2-2a-2b-2ab=0$$
$$\Rightarrow (1+a^2-2a)+(a^2+b^2-2ab)+(1+b^2-2b)=0$$
$$\Rightarrow (1-a)^2+(a-b)^2+(1-b)^2=0$$

مجموع أعداد حقيقة غير سالبة يساوي صفر مما يعني أنها جميعا أصفار أي أن: $1=a=b$ وبالتالي: $1=2^x=3^x$

إذن $x=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة.

**مثال4 :**

أوجد الحل الحقيقي للمعادلة $\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\sqrt{...+\sqrt{4^n x+3}}}}}-\sqrt{x}=1$ ؟.

**الحل :**

$$\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\sqrt{...+\sqrt{4^n x+3}}}}}-\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\sqrt{...+\sqrt{4^n x+3}}}}}=\sqrt{x}+1$$

بتربيع المعادلة المكافئة نحصل على:

$$x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\sqrt{...+\sqrt{4^n x+3}}}}=x+2\sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{4x+\sqrt{16x+\sqrt{...+\sqrt{4^n x+3}}}}=2\sqrt{x}+1$$

بالتربيع مرة أخرى نحصل على:

$$4x+\sqrt{16x+\sqrt{...+\sqrt{4^n x+3}}}=4x+4\sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{16x+\sqrt{...+\sqrt{4^n x+3}}}=4\sqrt{x}+1$$

بالتربيع مرة أخرى نحصل على:

$$16x+\sqrt{\sqrt{64x}+\sqrt{...+\sqrt{4^n x+3}}}=16x+8\sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{\sqrt{64x}+\sqrt{...+\sqrt{4^n x+3}}}=8\sqrt{x}+1$$

وبالاستمرار على هذا النسق نحصل على:

$$4^n x+3=4^n x+2.2^n.\sqrt{x}+1 \Rightarrow 2.2^n.\sqrt{x}=2 \Rightarrow 2^n.\sqrt{x}=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{4^n}}$$

أخي المتدرب : نشاط رقم **19**

التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

أوجد الحل الحقيقي للمعادلة $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}=0$ ؟.

**مثال5 :**

أوجد الحل الحقيقي للمعادلة $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}=0$ ؟.

**الحل1 :**

سبق أن رأينا أن : $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$ وسنحاول توظيفها في الحل.

لنعتبر الأعداد المتمايزة: $a=\sqrt[3]{x-1}\ ;\ b=\sqrt[3]{x}\ ;\ c=\sqrt[3]{x+1}$ فتصبح المعادلة الناتجة مكافئة للمعادلة المعطاة بالسؤال:

$$(x-1)+(x)+(x+1)-3.\sqrt[3]{(x-1)(x)(x+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\times(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1})((\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x})^2+(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1})^2+(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})^2)$$
$$\Rightarrow (x-1)+(x)+(x+1)-3.\sqrt[3]{(x-1)(x)(x+1)}=0$$
$$\Rightarrow 3x-3.\sqrt[3]{(x-1)(x)(x+1)}=0$$
$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{(x-1)(x)(x+1)} \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{x^3-x}}$$

بتكعيب الطرفين نحصل على: $x^3=x^3-x$

إذن الحل الوحيد هو: $\boxed{x=0}$.

**الحل2 :**

الدالة الحقيقية المعرفة بالشكل: $f_{(x)}=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}$ متزايدة وبالتالي المعادلة $f_{(x)}=0$ لها على الأكثر حل واحد.

بما أن $\boxed{x=0}$ يحقق المعادلة فهو الحل الوحيد.

أخي المتدرب : نشاط رقم **20** التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

أوجد جميع الحلول الحقيقية $x, y, z, w$ لنظام المعادلات التالي :

$$\begin{cases} x + y + z = w \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{w} \end{cases}$$ ؟.

أخي المتدرب : نشاط رقم 21 التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

أوجد حل نظام المعادلات التالي :

$$\begin{cases} 2(\log_x y + \log_y x) = 5 \\ xy = 8 \end{cases}$$ ؟.

### 15.1: حل نظم معادلات خطية وغير خطية

**مثال1 :**

أوجد جميع الحلول الحقيقية $x, y, z, w$ لنظام المعادلات التالي :

$$\begin{cases} x+y+z=w \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{w} \end{cases} \text{؟.}$$

**الحل :**

من السهل ملاحظة أنه باعتبار أيا من $x, y, z$ مساويا لـــ $w$ مثلا $x=w$ فنحصل على الحل للمتغيرين الآخرين بأن أحدهما النظير الجمعي للآخر أي $y=-z$ .

الآن هل هذا هو الحل أم توجد حلول أخرى

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w} \Rightarrow \frac{yz+xz+xy}{xyz}=\frac{1}{w}$$
$$\Rightarrow w(yz+xz+xy)=xyz$$
$$\Rightarrow (x+y+z)(xy+xz+yz)=xyz$$
$$\Rightarrow x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+2xyz=0$$
$$\Rightarrow (x^2y+y^2x)+(z^2y+xyz)+(x^2z+z^2x)+(y^2z+xyz)=0$$
$$\Rightarrow xy(x+y)+yz(x+y)+xz(x+z)+yz(x+z)=0$$
$$\Rightarrow y(x+y)(x+z)+z(x+z)(x+y)=0$$
$$\Rightarrow (x+y)(x+z)(y+z)=0$$

وهذا يعني أن واحد من $(x+y),(x+z),(y+z)$ مساويا للصفر

$x+y=0 \Rightarrow y=-z$ وبالتالي $x=x+y+z=w$ وهو الحل الذي افترضناه بداية.

**مثال2 :**

أوجد حل نظام المعادلات التالي :

$$\begin{cases} 2(\log_x y+\log_y x)=5 \\ xy=8 \end{cases} \text{؟.}$$

**الحل :**

من تعريف الدالة اللوغاريتمية فإن: $(x \succ 0, x \neq 1 \ ; \ y \succ 0, y \neq 1)$ ، كما أن: $\log_y x=\dfrac{1}{\log_x y}$

$$2\log_x y+2\log_y x=5 \Rightarrow 2\log_x y+\frac{2}{\log_x y}=5 \qquad \Rightarrow 2\left(\log_x y\right)^2-5\log_x y+2=0$$
$$\Rightarrow \left(\log_x y-2\right)\left(2\log_x y-1\right)=0 \Rightarrow \log_x y=2 \ \vee \ \log_x y=3$$
$$\log_x y=2 \Rightarrow y=x^2 \quad \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2, y=4$$
$$\log_x y=\frac{1}{2} \Rightarrow y=x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow x^{\frac{3}{2}}=8 \Rightarrow x=4, y=2$$

أخي المتدرب : نشاط رقم 22 التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

أوجد حل نظام المعادلات التالي :

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=34 \end{cases}$$ ؟.

**مثال3 :**

أوجد حل نظام المعادلات التالي :

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=34 \end{cases}$$ ؟.

**الحل :**

لنأخذ كثيرة الحدود الواحدية: $f_{(t)}=t^3+at^2+bt+c$ والتي لها **الجذور** $(x,y,z)$.

$$\because\ x+y+z=4 \Rightarrow a=-(x+y+z)=-4$$

فتصبح كثيرة الحدود هي: $f_{(t)}=t^3-4t^2+bt+c$ .

$$b=xy+xy+yz$$

$$\because\ (x+y+z)^2=(x^2+y^2+z^2)+2(xy+xy+yz)$$

$$\therefore\ 2(xy+xy+yz)=16-14=2 \Rightarrow xy+xy+yz=1 \Rightarrow b=1$$

فتصبح كثيرة الحدود هي: $f_{(t)}=t^3-4t^2+t+c$ .

لكن $\{x,y,z\}$ جذور كثير الحدود $f_{(t)}=t^3-4t^2+t+c$ وبالتالي فإن:

$$x^3-4x^2+x+c=0$$

$$y^3-4y^2+y+c=0$$

$$z^3-4z^2+z+c=0$$

بجمع المعادلات السابقة والاستفادة من شروط المسألة نجد أن:

$$(x^3+y^3+z^3)-4(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)+3c=0$$

$$\Rightarrow 34-4\times16+4+3c=0 \Rightarrow c=6$$

فتصبح كثيرة الحدود المفروضة: $f_{(t)}=t^3-4t^2+t+6$ الآن نحاول إيجاد جذور كثيرة الحدود والتي هي حل للنظام:

بالتجريب نجد أن $f_{(-1)}=0$ وبالتالي نحصل على الجذر $t_1=-1$ ويمكننا تحليل كثيرة الحدود بالشكل:

$$f_{(t)}=(t+1)(t^2-5t+6)=(t+1)(t-2)(t-3) \quad \Rightarrow t_2=2\ ,\ t_3=3$$

فيصبح حل النظام المعطى هو : $\{-1,2,3\}$ مع مراعاة احتمالات ترتيب الحل بالنسبة لـــ $\{x,y,z\}$.

أخي المتدرب : نشاط رقم 23 التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

أوجد حل نظام المعادلات التالي في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$\begin{cases} y^2+u^2+v^2+w^2=4x-1 \\ x^2+u^2+v^2+w^2=4y-1 \\ x^2+y^2+v^2+w^2=4u-1 \\ x^2+y^2+u^2+w^2=4v-1 \\ x^2+y^2+u^2+v^2=4w-1 \end{cases}$$ ؟.

**مثال4 :**

أوجد حل نظام المعادلات التالي في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$\begin{cases} y^2+u^2+v^2+w^2=4x-1 \\ x^2+u^2+v^2+w^2=4y-1 \\ x^2+y^2+v^2+w^2=4u-1 \\ x^2+y^2+u^2+w^2=4v-1 \\ x^2+y^2+u^2+v^2=4w-1 \end{cases} \text{؟.}$$

**الحل :**

بكتابة النظام بالشكل:

$$\begin{cases} y^2+u^2+v^2+w^2-4x+1=0 \\ x^2+u^2+v^2+w^2-4y+1=0 \\ x^2+y^2+v^2+w^2-4u+1=0 \\ x^2+y^2+u^2+w^2-4v+1=0 \\ x^2+y^2+u^2+v^2-4w+1=0 \end{cases}$$

بجمع المعادلات الخمسة معا وتجميع الحدود المتجانسة في المتغيرات $x,y,u,v,w$ والاستفادة من الحد الثابت في إكمال المربع وفق الشكل:

$$(4x^2-4x+1)+(4y^2-4y+1)+(u^2-4u+1)+(v^2-4v+1)+(w^2-4w+1)=0$$
$$\Rightarrow (2x-1)^2+(2y-1)^2+(2u-1)^2+(2v-1)^2+(2w-1)^2=0$$

وبما أن كل من $x,y,u,v,w$ أعداد حقيقية فيجب أن تكون جميع الحدود أصفار حتى يكون المجموع متحقق.

$$\therefore \quad x=y=u=v=w=\frac{1}{2}$$

## 16.1 :العلاقات الارتدادية Recurrence Relations

**ملاحظات لحل مسائل العلاقات الارتدادية :**

- التعويض بقيم لحساب عدد من قيم العلاقة بالإضافة للقيم المعطاة في المسألة لإمكانية الاستفادة من خواص النتائج المحسوبة.
- إن أمكن كتابة بعض التبريرات لتخمين الحل من خلا ل المتتالية الناتجة.
- العديد من الدوال العددية يمكن أن يعبر عنها بعلاقات ارتدادية مثل:

$$a_n = a_{n-1} + 1 \qquad , a_1 = 1 \quad \Rightarrow a_n = n$$
$$a_n = 2.a_{n-1} \qquad , a_0 = 1 \quad \Rightarrow a_n = 2^n$$
$$a_n = n.a_{n-1} \qquad , a_1 = 1 \quad \Rightarrow a_n = n!$$

- الاستقراء الرياضي مفيد لإثبات صحة التوقع أحيانا.

أخي المتدرب : نشاط رقم **24** التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) أوجد حل العلاقة الارتدادية التالية $a_0 = 0,\ a_n = a_{n-1} + 2n - 1\ ;\ n \geq 1$ ؟

02) أوجد المتتالية التي تحقق: $a_0 = 0,\ a_n = 2a_{n-1} + 1\ ;\ n \geq 1$ ؟

**مثال1:**

أوجد حل العلاقة الارتدادية التالية $a_0 = 0,\ a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \ ; n \ge 1$ ؟

**الحل:**

بالاستفادة من الشروط الأولية للعلاقة نجد أن:

$$a_0 = 0 = 0^2$$
$$a_1 = a_0 + 2.1 - 1 = 0 + 1 = 1 = 1^2$$
$$a_2 = a_1 + 2.2 - 1 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$a_3 = a_2 + 2.3 - 1 = 4 + 5 = 9 = 3^2$$
$$a_4 = a_3 + 2.4 - 1 = 9 + 7 = 16$$

يبدو أن العلاقة العامة هي $f_{(n)} = n^2$ وسنقوم بالتحقق من ذلك:

الخطوة الأولى اختبار صحة القضية للحد الأول: $a_0 = 0 = 0^2$ معطى.

الخطوة الثانية سنفرض صحة العلاقة عند $n$ أي $f_{(n)} = n^2$ أن صحيحة.

الخطوة الثالثة إثبات صحتها عند $n+1$ أي أن $f_{(n+1)} = (n+1)^2$ صحيحة.

$$a_{n+1} = a_{(n+1)-1} + 2(n+1) - 1 \ \Rightarrow a_{n+1} = a_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

أي أن العلاقة صحيحة وبالتالي $a_n = n^2 \ ; n \ge 0$

**مثال2:**

أوجد المتتالية التي تحقق: $a_0 = 0,\ a_n = 2a_{n-1} + 1 \ ; n \ge 1$ ؟

**الحل:**

بالاستفادة من الشروط الأولية للعلاقة نجد أن:

$$a_0 = 0 = 0^2 = 2^0 - 1$$
$$a_1 = 2a_0 + 1 = 2.0 + 1 = 0 + 1 = 1 = 2^1 - 1$$
$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2.1 + 1 = 2 + 1 = 3 = 2^2 - 1$$
$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2.3 + 1 = 6 + 1 = 7 = 2^3 - 1$$
$$a_4 = 2a_3 + 1 = 2.7 + 1 = 14 + 1 = 15 = 2^4 - 1$$

يبدو أن العلاقة العامة هي $f_{(n)} = 2^n - 1$ وسنقوم بالتحقق من ذلك:

الخطوة الأولى اختبار صحة القضية للحد الأول: $a_0 = 0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ معطى.

الخطوة الثانية سنفرض صحة العلاقة عند $n$ أي $f_{(n)} = 2^n - 1$ أن صحيحة.

الخطوة الثالثة إثبات صحتها عند $n+1$ أي أن $f_{(n+1)} = 2^{n+1} - 1$ صحيحة.

$$a_{n+1} = 2.a_{(n+1)-1} + 1 \ \Rightarrow a_{n+1} = 2.a_n + 1 = 2.(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

أي أن العلاقة صحيحة وبالتالي $a_n = 2^n - 1 \ ; n \ge 0$ .

## 17.1: الأعداد المركبة Complex Numbers

نتذكر أننا نرمز $i=\sqrt{-1}$ وهي الوحدة التخيلية، و $\boxed{i}$ عدد مركب يحقق $\boxed{i^2=-1}$ وبالتالي:
$i^1=i, i^2=-1, i^3=i., i^4=1$ ...لذا فقوى $i$ لها دورة طولها 4 .

مثال: $i^{2009}=i^{4(502)+1}=(i^4)^{502}(i)=(1)^{502}(i)=i$ .

ويكتب العدد المركب $z$ بالشكل $z=a+bi$ أو $z=(a,b)$ أو $z=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ حيث $a,b$ أعداد حقيقية، $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$ ويسمى $a$ بالجزء الحقيقي و $b$ بالجزء التخيلي.ونرمز لمرافق العدد المركب $z=a+bi$ بالرمز $\bar{z}$ ويكتب $\bar{c}=a-bi$ .

بعض القوانين الهامة:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)\times(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$
$$|a+bi|=\sqrt{(a+bi).(\overline{a+bi})}=\sqrt{(a+bi).(a-bi)}=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

### علاقة الدوال المثلثية بالأعداد المركبة

1) صيغة ديموافر de Moivre's:

$$\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta}$$

2) متطابقة أويلر :

$$\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\qquad e^{-i\theta}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}$$

3) الدوال المثلثية بدلالة الدالة الأسية:

$$\boxed{\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\quad,\qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

4) صيغة لجذور الأعداد المركبة مستنتجة من صيغة ديموافر:

$$\sqrt[n]{\cos\alpha+i\sin\alpha}=\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\quad;(k=0,1,2,...,n-1)$$

**متباينة المثلث:**

إذا كان $z_1,z_2$ عددين مركبين فإن: $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

**مثال1:**

أوجد جذور المعادلة: $x^3-1=0$ ؟

**الحل:**

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

إما $x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$ أو $x^2+x+1=0$ ،

باستخدام القانون العام لحل معادلة الدرجة الثانية نجد أن:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

**حل آخر:**

**تذكر:**

$2\pi$ بالقياس الدائري تساوي $360^\circ$ بالقياس الستيني.

$$x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\quad ,k=0,1.2$$

$x_1=1$ ,

$$x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ .$$

سنرمز لـــ $x_2$ بـــ $\omega$ وبالتالي سنرمز لـــ $x_3$ بـــ $\omega^2$ .

**ملاحظة على الجذور التكعيبية للواحد:**

$$w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow w^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow w\,w^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1$$

$$\Rightarrow \boxed{w+w^2+1=0}$$

أخي المتدرب : نشاط رقم **25**　　　　التاريخ　/ / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) أوجد حاصل ضرب الجزء الحقيقي من جذور المعادلة التالية: $z^2 - z = 5 - 5i$ ؟

02) في حقل الأعداد المركبة أثبت أن : $i = \sqrt{-1}\ ;\ 0 = {}^{40}(1-i) - {}^{40}(1+i)$ ؟

**مثال2:**

أوجد حاصل ضرب الجزء الحقيقي من جذور المعادلة التالية: $z^2 - z = 5 - 5i$ ؟

**الحل:**

باستخدام القانون العام لحل معادلة الدرجة الثانية نجد أن:

$$z^2 - z = 5 - 5i \Rightarrow z^2 - z + (-5 + 5i) = 0$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{21 - 20i}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{21 - 2\sqrt{-100}}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{25 - 2\sqrt{(25)(-4)} - 4}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{25 - 2\sqrt{(25)(-4)} + 4i^2}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(5 - 2i)^2}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm (5 - 2i)}{2}$$

$$\Rightarrow z = 3 - i \quad \vee \quad z = -2 + i$$

فيصبح حاصل ضرب الجزء الحقيقي من جذرا المعادلة هو : $(3)(-2) = \boxed{-6}$ .

> **تذكر:** ما هو السبب في أن جذري المعادلة أو بعبارة أخرى جذري كثيرة الحدود : $f_{(z)} = z^2 - z + (-5 + 5i)$ غير مترافقين؟

**مثال3:**

في حقل الأعداد المركبة أثبت أن : $i = \sqrt{-1};\ 0 = (1 + i)^{40} - (1 - i)^{40}$ ؟

**الحل:**

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$$

$$(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$$

$$(1 + i)^{40} - (1 - i)^{40} = (2i)^{20} - (-2i)^{20} = 2^{20}.i^{20} - 2^{20}.i^{20} = 0$$

حل آخر:

$$i(1 - i) = i - i^2 = 1 + i \quad ; i^4 = 1$$

$$(1 + i)^4 = i^4.(1 - i)^4 = (1 - i)^4$$

$$(1 + i)^{40} - (1 - i)^{40} = (1 + i)^{40} - \left((1 - i)^4\right)^{10} = (1 + i)^{40} - (1 + i)^{40} = 0$$

حل آخر باستخدام صيغة ديموافر.

## 18.1 : معادلات الدوال Functional Equations

**بعض الطرق الأساسية لحل مسائل معادلات الدوال:**

- التعويض بقيم عن المتغيرات (على سبيل المثال 0 أو 1) وتعتبر المحاولة الأولى والأكثر شيوعا ، وإن أمكن كتابة بعض التبريرات التي تجعل جزءا من المعادلة ثابتا.على سبيل المثال إذا ظهرت $f_{(x+y)}$ في شروط المسألة واستطعنا حساب $f_{(0)}$ يمكن أن يساعدنا التعويض التالي $x=-y$ .
- الاستقراء الرياضي مفيد بالاستفادة من قيمة $f_{(1)}$ للحصول على جميع قيم $f_{(n)}$ لجميع الأعداد الصحيحة $n$ .ويمكن حساب $f_{(\frac{1}{n})}$ و $f_{(r)}$ للعدد الكسري $r$ وهي طريقة مفيدة لإيجاد بعض الدوال المعرفة على مجموعة الأعداد القياسية.
- التحقق من إمكانية الاستفادة من خواص الدوال المعطاة.
- العثور على نقاط ثابتة أو أصفار للدوال واستخدام هذه الطريقة أقل من الطرق السابقة.
- استخدام معادلة كوشي المعادلة والمعادلات المماثلة لها.
- استخدام العلاقات الارتدادية وخاصة إذا كان المدى محدودا ، أو أمكن إيجاد علاقة بين $f_{(n)}, f(f_{(n)})$ و $n$ .
- من المهم للغاية تخمين الحل في البداية (إن أمكن) حيث يمكن أن يساعد في إيجاد بدائل مناسبة، وإيجاد الحل.
- التحقق من أن الحل يحقق الشروط المعطاة.

**مثال1 :**

إذا كانت $f$ دالة حقيقية فأوجد حل $\left(f_{(x+y)}\right)^2=\left(f_{(x)}\right)^2+\left(f_{(y)}\right)^2$ لجميع الأعداد الحقيقية $x,y$ ؟

**الحل:**

لنأخذ $x=y=0$

$\left(f_{(0)}\right)^2=\left(f_{(0)}\right)^2+\left(f_{(0)}\right)^2$ ،لذا $\left(f_{(0)}\right)^2=0$ ،وبالتالي $f_{(0)}=0$

الآن لنعتبر $y=-x$

$$\left(f_{(x-x)}\right)^2=\left(f_{(x)}\right)^2+\left(f_{(-x)}\right)^2$$
$$\left(f_{(0)}\right)^2=\left(f_{(x)}\right)^2+\left(f_{(-x)}\right)^2$$
$$0=\left(f_{(x)}\right)^2+\left(f_{(-x)}\right)^2$$

وحيث أن مجموع أعداد حقيقية غير سالبة يكون صفرا إذا وفقط إذا كانت جميعها أصفار.

إذن $f^2_{(0)}=0$ لجميع الأعداد الحقيقية وبالتالي الحل الوحيد هو $f_{(x)}=0$ .

للتأكد من صحة الحل:

$$\boxed{\left(f_{(x)}\right)^2+\left(f_{(y)}\right)^2}=(0)^2+(0)^2=(0)^2=\boxed{\left(f_{(x+y)}\right)^2}$$

أخي المتدرب : نشاط رقم **26** التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) أوجد جميع الدوال الحقيقية التي تحقق $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$ لجميع الأعداد الحقيقية $x$ ؟

02) أوجد جميع الدوال التي مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد النسبية بحيث:

$\boxed{f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1}$ , $\boxed{f(1) = 2}$ ؟

**مثال2:**

أوجد جميع الدوال الحقيقية التي تحقق $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$ لجميع الأعداد الحقيقية $x$ ؟

**الحل:**

لنستبدل $x$ بـــ $1-x$ في العلاقة المعطاة، فنحصل على:

❖ $(1-x)^2f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$

لكن $f(1-x)=2x-x^4-x^2f(x)$ من العلاقة المعطاة في السؤال.

بالتعويض عن $f(1-x)$ في العلاقة ❖ وحل المعادلة الناتج في $f(x)$ نجد أن:

$$(1-x)^2\left[2x-x^4-x^2f(x)\right]+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$$
$$\Rightarrow\left[1-x^2(1-x)^2\right]f(x)=2(1-x)-(1-x)^4-2x(1-x)^2+x^4(1-x)^2$$
$$\Rightarrow\left[1-x^2(1-x)^2\right]f(x)=2(1-x)-\left[(1-x)^2(1-x)^2-2x(1-x)^2\right]+x^4(1-x)^2$$
$$\Rightarrow\left[1-x^2(1-x)^2\right]f(x)=2(1-x)-\left[(1-2x+x^2)(1-x)^2-2x(1-x)^2\right]+x^4(1-x)^2$$
$$\Rightarrow\left[1-x^2(1-x)^2\right]f(x)=2(1-x)-(1+x^2)(1-x)^2+x^4(1-x)^2$$
$$\Rightarrow\left[1-x^2(1-x)^2\right]f(x)=2(1-x)-(1-x)^2-x^2(1-x)^2+x^4(1-x)^2$$
$$\Rightarrow\left[1-x^2(1-x)^2\right]f(x)=(1-x)(2-1+x)+x^2(1-x)^2(x^2-1)$$
$$\Rightarrow\left[1-x^2(1-x)^2\right]f(x)=(1-x^2)+x^2(1-x)^2(x^2-1)$$
$$\Rightarrow\left[1-x^2(1-x)^2\right]f(x)=(1-x^2)-x^2(1-x)^2(1-x^2)$$
$$\Rightarrow\left[1-x^2(1-x)^2\right]f(x)=(1-x^2)\left[1-x^2(1-x)^2\right]\quad\Rightarrow\boxed{f(x)=1-x^2}$$

للتأكد من صحة الحل:

$$\boxed{x^2f(x)+f(1-x)}=x^2(1-x^2)+\left(1-(1-x)^2\right)=x^2-x^4+(1-1+2x-x^2)=\boxed{2x-x^4}$$

**مثال3 :**

أوجد جميع الدوال التي مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد النسبية بحيث:

$\boxed{f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1}$ , $\boxed{f(1)=2}$ ؟

**الحل :**

لنعتبر أن: $x=1,\ y=n$ وبالتعويض في المعادلة الأساسية نجد أن:

$$f(1\times n)=f(1)f(n)-f(1+n)+1\Rightarrow f(n)=2\times f(n)-f(n+1)+1\Rightarrow f(n+1)=f(n)+1$$

بما أن $f(1)=2$ فيكون لدينا $\boxed{f(n+1)=n+1}$ لكل عدد طبيعي $n$ .

وبالمثل لنعتبر $x=0,\ y=n$ وبالتعويض في المعادلة الأساسية نجد أن:

$$f(0\times n)=f(0)f(n)-f(0+n)+1\Rightarrow f(0)=f(0)f(n)-f(n)+1\Rightarrow f(0)=(n+1)f(0)-(n+1)+1$$
$$\Rightarrow nf(0)=n\Rightarrow\boxed{f(0)=1}$$

سنقوم بإيجاد $f(z)$ حيث $z$ عدد صحيح:

لنعتبر $x=-1,\ y=1$ وبالتعويض في المعادلة الأساسية نجد أن:

$$f(-1\times 1)=f(-1)f(1)-f(-1+1)+1\Rightarrow f(-1)=f(-1)\times(2)-f(0)+1\Rightarrow f(-1)=f(0)-1\Rightarrow \boxed{f(-1)=0}$$

وبالمثل لنعتبر $x=-1,\ y=n$ وبالتعويض في المعادلة الأساسية نجد أن:

$$f(-1\times n)=f(-1)f(n)-f(-1+n)+1\Rightarrow f(-n)=0\times f(n)-f(n-1)+1$$
$$\Rightarrow f(-n)=-(n-1+1)+1\Rightarrow \boxed{f(-n)=-n+1}$$

وبالتالي $\boxed{f(z)=z+1}$ لكل عدد صحيح $z$ .

الآن سنقوم بتحديد $f(\frac{1}{n})$ حيث $n$ عدد طبيعي.

لنعتبر $x=n,\ y=\frac{1}{n}$ وبالتعويض في المعادلة الأساسية نجد أن:

❖ $$f(n\times\tfrac{1}{n})=f(n)f(\tfrac{1}{n})-f(n+\tfrac{1}{n})+1\Rightarrow \boxed{f(1)=(n+1)f(\tfrac{1}{n})-f(n+\tfrac{1}{n})+1}$$

كما أنه لــ $x=1,\ y=m+\frac{1}{n}$ وبالتعويض في المعادلة الأساسية نجد أن:

$$f(1\times(m+\tfrac{1}{n}))=f(1)f(m+\tfrac{1}{n})-f(1+m+\tfrac{1}{n})+1\Rightarrow f(m+\tfrac{1}{n})=2\times f(m+\tfrac{1}{n})-f(1+m+\tfrac{1}{n})+1$$
$$\Rightarrow \boxed{f(1+m+\tfrac{1}{n})=f(m+\tfrac{1}{n})+1}$$

وبالتالي من مبدأ الاستقراء الرياضي فإن: $\boxed{f(m+\frac{1}{n})=m+f(\frac{1}{n})}$

وبالرجوع لــ ❖ نجد أن:

$$f(1)=(n+1)f(\tfrac{1}{n})-f(n+\tfrac{1}{n})+1\Rightarrow 2=(n+1)f(\tfrac{1}{n})-(n+f(\tfrac{1}{n}))+1$$
$$\Rightarrow 2=nf(\tfrac{1}{n})+f(\tfrac{1}{n})-n-f(\tfrac{1}{n})+1\Rightarrow nf(\tfrac{1}{n})=n+1\Rightarrow \boxed{f(\tfrac{1}{n})=\frac{1}{n}+1}$$

كما أنه باعتبار $x=m,\ y=\frac{1}{n}$ وبالتعويض في المعادلة الأساسية نجد أن:

$$f(m\times\tfrac{1}{n})=f(m)f(\tfrac{1}{n})-f(m+\tfrac{1}{n})+1\Rightarrow f(\tfrac{m}{n})=(m+1)(\frac{1}{n}+1)-(m+\frac{1}{n}+)+1$$
$$\Rightarrow f(\tfrac{m}{n})=\frac{m}{n}+m+\frac{1}{n}+1-m-\frac{1}{n}-1+1\Rightarrow \boxed{f(\tfrac{m}{n})=\frac{m}{n}+1}$$

أي أن $f(r)=r+1$ لكل عدد نسبي موجب $r$ .

وبالمثل لنعتبر $x=-1,\ y=r$ حيث $r$ عدد نسبي موجب وبالتعويض في المعادلة الأساسية نجد أن:

$$f(-1\times r)=f(-1)f(r)-f(-1+r)+1\Rightarrow f(-r)=0\times f(r)-f(r-1)+1$$
$$\Rightarrow f(-r)=-(r-1+1)+1\Rightarrow \boxed{f(-r)=-r+1}$$

وبالتالي $f(x)=x+1$ لكل عدد نسبي $x$ .

للتأكد من صحة الحل:

لكل عددين نسبيين $x,y$ نجد بالتعويض في شرط المعادلة الدالية أن:

$$\boxed{f(x)f(y)-f(x+y)+1}=(x+1)(y+1)+-(x+y+1)+1$$
$$=xy+x+y+1-x-y-1+1=xy+1=\boxed{f(xy)}$$

أي أن $f$ حل للمعادلة المعطاة.

أخي المتدرب : نشاط رقم 27 التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

لأي عددين حقيقيين $a,b$ أوجد: $\min_{a,b\in\mathbb{R}} \max(a^2+b, b^2+a)$ ؟.

## 20.1: المتباينات Inequalities

**المتباينات** عبارة عن علاقات (قوانين) بين مقادير جبرية تتضمن إحدى علامات التباين $\geq,<$ أو $\leq,>$. من أبسط المتباينات التي نعرفها هي المتباينة $x^2 \geq 0$ والمتحققة لأي عدد حقيقي x.

## 21.1: دالتي الأكبر والأصغر Max and Min Functions

تعرف دالة الكبرى أو الأكبر max لزوج مرتب $(a,b)$ كما يلي:

$$\max\{(a,b)\} = \begin{cases} a & : a \geq b \\ b & : b \geq a \end{cases}$$

وغالبا ما يكتب $\max(a,b)$ بدلا من $\max\{(a,b)\}$ وذلك للاختصار. يمكن التعبير عن دالة max كما يلي:

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}\left(a+b+|a-b|\right)$$

للتحقق من هذا، بدون فقد لعمومية المسألة لنفرض $a \geq b$. فيكون:

$$a = \max(a,b) = \frac{1}{2}\left(a+b+|a-b|\right) = \frac{1}{2}\left(a+b+a-b\right) = a$$

تعرف دالة الصغرى أو الأصغر بصورة مشابهة كما يلي:

$$\min\{(a,b)\} = \begin{cases} a & : a \leq b \\ b & : b \leq a \end{cases}$$ ويمكنك التحقق من العلاقة: $$\min(a,b) = \frac{1}{2}\left(a+b-|a-b|\right)$$

ابسط أنواع الربط بين دالة الأكبر والأصغر عبر المتطابقة

$$\max(a_1,a_2,\cdots,a_n) = -\min(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$$

لأكثر من عددين نستطيع تعريف دالة الأكبر ودالة الأصغر تكراريا بالعلاقات التالية:

$$\boxed{\begin{array}{l} \max(a_1,a_2,a_3) = \max(\max(a_1,a_2),a_3) \\ \min(a_1,a_2,a_3) = \min(\min(a_1,a_2),a_3) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \max(a_1,a_2,\cdots,a_n) = \max(\max(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}),a_n) \\ m\ \text{in}(a_1,a_2,\cdots,a_n) = \min(\min(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}),a_n) \end{array}}$$

**مثال1 :**

لأي عددين حقيقيين $a,b$ أوجد: $\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \max(a^2+b,b^2+a)$ ؟.

**الحل :**

لنعتبر $M(a,b) = \max(a^2+b,b^2+a)$

أي أن: $M(a,b) \geq b^2+a$ , $M(a,b) \geq a^2+b$ وبالتالي:

$$2M(a,b) \geq a^2+b+b^2+a \Rightarrow 2M(a,b)+\frac{1}{2} \geq \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 2M(a,b) \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{M(a,b) \geq -\frac{1}{4}}$$

أي أن $\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \max(a^2+b,b^2+a) = \min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} M(a,b) = -\frac{1}{4}$ . (متى تحصل هذه القيم؟)

**تمهيد:**

إذا جعلنا $x=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ حيث $a,b\geq 0$ فإن

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$$

وبنشر الطرف الأيسر نحصل على $a+b-2\sqrt{ab}\geq 0$ ومنه نستنتج العلاقة:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

وتسمى متباينة الوسط الحسابي- الوسط الهندسي حيث أن $\frac{a+b}{2}$ هو الوسط الحسابي و $\sqrt{ab}$ الوسط الهندسي للعددين $a,b$ على الترتيب. لهذه المتباينة صورة أعم تشمل $n$ من الأعداد نقدمها بعد تقديم المتباينة التالية.

## 21.1: متباينة إعادة الترتيب Rearrangements Inequality RI

إذا كانت $a_1,a_2,\ldots,a_n$ و $b_1,b_2,\ldots,b_n$ أعداد حقيقية (ليست بالضرورة موجبة) بحيث

$$a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$$
$$b_1\leq b_2\leq\ldots\leq b_n$$

فإن

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1\leq a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n\leq a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$$

وذلك لكل تبديلة $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ لـــ $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$. التساوي في الشق الأيمن يتحقق إذا وإذا فقط

$$b_1=c_1,b_2=c_2,\ldots,b_n=c_n$$

وفي الشق الأيسر من المتباينة يتحقق التساوي إذا وإذا فقط

$$b_n=c_1,b_{n-1}=c_2,\ldots,b_1=c_n$$

تمتاز متباينة إعادة الترتيب بشكلها البسيط والبديهي القادر على إثبات متباينات غير بديهية كبرى مثل متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي كما أنها تقبل الأعداد السالبة بعكس الكثير من المتباينات المشهورة.

النتيجة التالية هامة لإثبات المتباينة القادمة.

أخي المتدرب : نشاط رقم 28 التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) أثبت أنه إذا كانت $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ فإن $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1} \geq n$ ؟.

02) لأي أعداد حقيقية $a,b,c$ برهن أن: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ ؟.

03) لأي أعداد حقيقية $a,b,c$ برهن أن: $a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+b^2c+c^2a$ ؟.

**نتيجة:**

إذا كانت $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ فإن $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\ge n$

**البرهان:**

بدون فقد لعمومية المسألة يمكن فرض أن $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n$ وبالتالي فإن

$$\frac{1}{a_n}\le\frac{1}{a_{n-1}}\le\ldots\le\frac{1}{a_2}\le\frac{1}{a_1}$$

إذا من متباينة إعادة الترتيب RI فإن

$$a_n\left(\frac{1}{a_n}\right)+a_{n-1}\left(\frac{1}{a_{n-1}}\right)+\ldots+a_1\left(\frac{1}{a_2}\right)\le a_2\left(\frac{1}{a_3}\right)+a_{n-1}\left(\frac{1}{a_n}\right)+\ldots+a_n\left(\frac{1}{a_1}\right)$$

$$n=1+1+\cdots+1\le\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}$$

**مثال**2 **:**

لأي أعداد حقيقية $a,b,c$ برهن أن:

$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ ؟.

**الحل :**

بدون فقد لعمومية المسألة سنفرض أن $a\ge b\ge c\ge 0$ لأن إشارة كل من $a,b,c$ لا تؤثر في الطرف الأيسر من المتباينة وبالتالي بتطبيق متباينة إعادة الترتيب RI على المتتابعتين: $(a,b,c)$ وً $(a,b,c)$ نجد أن:

$a.a+b.b+c.c\ge a.b+b.c+c.a\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ وهو المطلوب.

**مثال**3 **:**

لأي أعداد حقيقية $a,b,c$ برهن أن:

$a^3+b^3+c^3\ge a^2b+b^2c+c^2a$ ؟.

**الحل :**

بدون فقد لعمومية المسألة سنفرض أن $a\ge b\ge c$ وبتطبيق متباينة إعادة الترتيب RI على المتتابعتين: $(a^2,b^2,c^2)$ وً $(a,b,c)$ نجد أن:

$a^2.a+b^2.b+c^2.c\ge a^2.b+b^2.c+c^2.a\Rightarrow a^3+b^3+c^3\ge a^2.b+b^2.c+c^2.a$ وهو المطلوب.

## 22.1 : متباينة الأوساط

### متباينة الوسط الحسابي– الوسط الهندسي AM-GM

إذا كانت $a_1 , a_2 ,\cdots, a_n$ أعداد حقيقية موجبة فإن

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

ويتحقق التساوي إذا وفقط إذا كان $a_1=a_2=\ldots=a_n$ .

### متباينة الوسط الهندسي– الوسط التوافقي GM-HM

إذا كانت $a_1 , a_2 ,\cdots, a_n$ أعداد حقيقية موجبة فإن

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

ويتحقق التساوي إذا وفقط إذا كان $a_1=a_2=\ldots=a_n$ .

الوسط الحسابيArithmetic Mean ورمزه AM والوسط الهندسي Geometric Mean ورمزه GM والوسط التوافقي Harmonic Mean ورمزه HM، أي أن

$$AM=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \quad GM=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}, \quad HM=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

**البرهان:**

نثبت أولا AM-GM. افرض أن $G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ وليكن

$$x_1=\frac{a_1}{G}, x_2=\frac{a_1a_2}{G^2},\cdots, x_n=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{G^n}$$

خذ التبديلة $(x_2,x_3,........,x_n\ ,x_1)$. من متباينة RI نعلم أن

$$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+........+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_1}{x_n} \geq n$$

بالتعويض عن هذه النسب نجد $n \geq \frac{a_1}{G} + \frac{a_n}{G} + ........ + \frac{a_3}{G} + \frac{a_2}{G}$ ، إذا

$$\frac{a_1 + a_2 + ........ + a_n}{n} \geq G$$

وهي المتباينة المطلوبة.

لإثبات الشق الثاني GM-HM $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$ أوجد مقلوب الطرفين.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

وهذه ليست سوى AM-GM ولكن على الأعداد $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ ويثبت المطلوب.

أخي المتدرب : نشاط رقم 29 التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) لتكن $a_1,a_2,...,a_n$ أعدادا حقيقية موجبة .ولتكن $b_1,b_2,...,b_n$ هي نفس الأعداد السابقة بترتيب مختلف برهن أن: $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n}\geq n$ ؟.

02) لأي أعداد حقيقية موجبة $a,b,c$ برهن أن: $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ ؟.

03) لأي أعداد حقيقية موجبة $a_1,a_2,...,a_n$ تحقق $a_1a_2...a_n=1$ ، أثبت أن: $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\geq 2^n$ ؟.

04) لأي أعداد حقيقية موجبة $a,b,c$ برهن أن: $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c$ ؟.

05) لأي أعداد حقيقية موجبة $a,b,c$ برهن أن: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ ؟.

06) أوجد أقل قيمة لـــ: $\log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)+...+\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right)$ لجميع $x_1,x_2,...,x_n\in(\frac{1}{4},1)$؟.

تابع نشاط رقم 29 التاريخ / / 1430 هـ

**مثال4 :**

لتكن $a_1,a_2,...,a_n$ أعدادا حقيقية موجبة .ولتكن $b_1,b_2,...,b_n$ هي نفس الأعداد السابقة بترتيب مختلف برهن أن:

؟ $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n}\geq n$.

**الحل :**

من متباينة $AM-GM$ باعتبار الأعداد الحقيقية الموجبة $\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},...,\frac{a_n}{b_n}$ لدينا:

$$\frac{\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1}\times\frac{a_2}{b_2}\times...\times\frac{a_n}{b_n}}=\sqrt[n]{1}=1$$

$$\Rightarrow\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n}\geq n$$

**مثال5 :**

لأي أعداد حقيقية موجبة $a,b,c$ برهن أن:

؟ $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.

**الحل :**

من متباينة $AM-GM$ لدينا:

$$a^2+b^2\geq 2ab$$
$$b^2+c^2\geq 2bc$$
$$c^2+a^2\geq 2ca$$

بجمع المتباينات الثلاث $2a^2+2b^2+2c^2\geq 2ab+2bc+2ca$ والقسمة على 2 نحصل على النتيجة المطلوبة.

**مثال6 :**

لأي أعداد حقيقية موجبة $a_1,a_2,...,a_n$ تحقق $a_1a_2...a_n=1$ ، أثبت أن:

؟ $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\geq 2^n$.

**الحل :**

من متباينة $AM-GM$ لدينا:

$$1+a_1\geq 2\sqrt{a_1}$$
$$1+a_2\geq 2\sqrt{a_2}$$
$$\vdots$$
$$1+a_n\geq 2\sqrt{a_n}$$

بضرب المتباينات السابقة نجد أن:

$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\geq\underbrace{2.2...2}_{n-times}\sqrt{a_1a_2...a_n}=2^n.1=2^n$ وهو المطلوب.

**مثال7 :**

لأي أعداد حقيقية موجبة $a,b,c$ برهن أن:

$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c$ ؟.

**الحل :**

لو فكرن باستخدام متباينة $AM-GM$ مباشرة على أحد طرفي المتباينة فلن نحصل على نتيجة لذا نحاول إيجاد علاقة لتساعدنا في الوصول للمطلوب والاستفادة من متباينة $AM-GM$ إن أمكن أو غيرها:

لنلاحظ المقادير: $\boxed{\frac{c^3}{ab}+a+b}$ , $\boxed{\frac{b^3}{ca}+c+a}$ , $\boxed{\frac{a^3}{bc}+b+c}$

من متباينة $AM-GM$ لدينا:

$$\frac{a^3}{bc}+b+c\geq 3\times\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc}.b.c}=3\times\sqrt[3]{a^3}=3a,$$
$$\frac{b^3}{ca}+c+a\geq 3\times\sqrt[3]{\frac{b^3}{ca}.c.a}=3\times\sqrt[3]{b^3}=3b,$$
$$\frac{c^3}{ab}+a+b\geq 3\times\sqrt[3]{\frac{c^3}{ab}.a.b}=3\times\sqrt[3]{c^3}=3c.$$

بجمع المتباينات الثلاث نحصل على:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}+2(a+b+c)\geq 3(a+b+c)\quad\Rightarrow\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c$$

وهو المطلوب.

**مثال8 :**

لأي أعداد حقيقية موجبة $a,b,c$ برهن أن:

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ ؟.

**الحل :**

من متباينة $AM-GM$ لدينا:

$$a+b+c\geq 3\times\sqrt[3]{abc}$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\times\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}$$

بضرب المتباينتين السابقتين نحصل على:

$$\boxed{(a+b+c)}\boxed{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}\geq\boxed{3\times\sqrt[3]{abc}}\times\boxed{3\times\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}}=3\times 3\times\sqrt[3]{\frac{abc}{abc}}=9$$

وهو المطلوب.

**مثال9 :**

أوجد أقل قيمة لـــ: $\log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right)$ لجميع $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(\frac{1}{4},1)$ ؟.

**الحل :**

نلاحظ أن $x^2\geq x-\frac{1}{4}\Leftarrow 0\geq{}^2(x-\frac{1}{2})$ لجميع الأعداد الحقيقية $x$ وبالاستفادة من كون جميع $x_i$'s $<1$ معطى، نجد أن:

$$\log_{x_k}\left(x_{k+1}-\frac{1}{4}\right)\geq\log_{x_k}(x_{k+1}^2)=2\log_{x_k}(x_{k+1})$$

لكن: $x_k\succ 0, x_k\neq 1$; $\log_{x_k}(x_{k+1})=\frac{\ln x_{k+1}}{\ln x_k}$

$$\sum_{k=1}^{n}\log_{x_k}\left(x_{k+1}-\frac{1}{4}\right)\geq 2\sum_{k=1}^{n}\log_{x_k}(x_{k+1})=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln x_{k+1}}{\ln x_k}$$

من متباينة $AM-GM$ لدينا:

$$\sum_{k=1}^{n}\log_{x_k}\left(x_{k+1}-\frac{1}{4}\right)\geq 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln x_{k+1}}{\ln x_k}\geq 2n\times\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{\ln x_{k+1}}{\ln x_k}}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\log_{x_k}\left(x_{k+1}-\frac{1}{4}\right)\geq 2n\times\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{\ln x_{k+1}}{\ln x_k}}=2n\times\sqrt[n]{\frac{\ln x_2}{\ln x_1}\times\frac{\ln x_3}{\ln x_2}\times\ldots\times\frac{\ln x_n}{\ln x_{n-1}}\times\frac{\ln x_1}{\ln x_n}}=2n\times 1=2n$$

لتصبح أقل قيمة مرشحة هي : $\min_{x_1,x_2,\ldots,x_n\in(\frac{1}{4},1)}\left[\log_{x_1}\left(x_2-\frac{1}{4}\right)+\log_{x_2}\left(x_3-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\log_{x_n}\left(x_1-\frac{1}{4}\right)\right]=2n$

## متباينة الجذر التربيعي Square Root Inequality

إذا كانت $a_1,a_2,\ldots\ldots\ldots,a_n$ أعداد حقيقية موجبة فإن

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}\geq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

والتساوي متحقق إذا وفقط إذا كان $a_1=a_2=\ldots=a_n$. الطرف الأيسر يسمى أحيانا الوسط التربيعي Quadratic Mean ورمزه QM وأحيانا يسمى وسط الجذر التربيعي Square Root Mean ورمزه SRM.

أخي المتدرب : نشاط رقم 30 | التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**



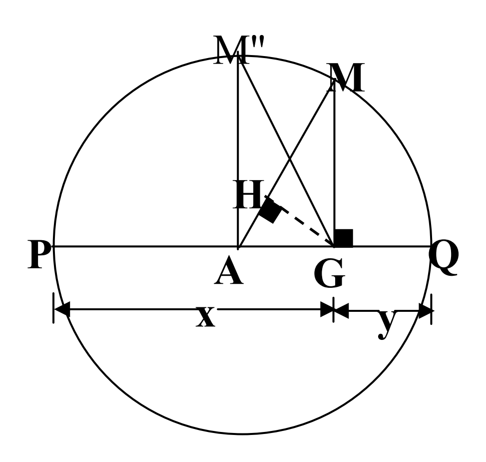
الشكل المجاور يمثل دائرة مركزها A ، PQ قطر في الدائرة وًالنقطة M تقع على محيط الدائرة، G المسقط العمودي من M على PQ وً H المسقط العمودي من G على AM، وليكن AM'' عمودي على PQ لتكن :

$PG=x$ وً $GQ=y$ :

i)أوجد طول كل من AM,GM,HM,GM'' بدلالة x,y.

ii) أعد ترتيب الأطوال السابقة تصاعديا.

**مثال11 :**




الشكل المجاور يمثل دائرة مركزها A ، PQ قطر في الدائرة وًالنقطة M تقع على محيط الدائرة، G المسقط العمودي من M على PQ وً H المسقط العمودي من G على AM، وليكن "AM عمودي على PQ لتكن : PG=x وً GQ=y :

iii) أوجد طول كل من "AM,GM,HM,GM بدلالة x,y.

iv) أعد ترتيب الأطوال السابقة تصاعديا.

**الحل :**

i) من خواص العلاقات المترية للمثلث القائم نجد أن:

$$AM=\frac{PQ}{2}=\frac{x+y}{2}$$

$$GM=\sqrt{QG.GP}=\sqrt{xy}$$

$$AG^2=AH.AM=(AM-HM).AM$$

$$AG^2=AM^2-HM.AM$$

$$HM.AM=AM^2-AG^2=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=xy$$

$$HM=\frac{xy}{AM}=\frac{xy}{\frac{x+y}{2}}=\frac{2xy}{x+y}$$

$$GM''=\sqrt{AM''^2+AG^2}=\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy+x^2+y^2-2xy}{4}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

نلاحظ من تعريف الوسط الحسابي والوسط الهندسي والوسط التوافقي والوسط التربيعي أن:

$AM$ هو الوسط الحسابي و $GM$ هو الوسط الهندسي و $HM$ هو الوسط التوافقي و $GM''$ هو الوسط التربيعي.

ii) نلاحظ أن $GM''>AM$ وتر في المثلث $GAM''$ ،

كما أن $AM>GM$ نصف قطر في دائرة ،

كما أن $GM>HM$ وتر في المثلث $GHM$ .

$$\therefore \quad GM''>AM>GM>HM$$

نلاحظ أن التساوي يحصل عندما $x=y$ .

## 23.1: متباينة شبيشيف Chebyshev's Inequality

إذا كانت $\left.\begin{matrix} a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \end{matrix}\right\}$ أعداد حقيقية (ليست بالضرورة موجبة) فإن $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \ge \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)}$

وإذا كانت $\left.\begin{matrix} a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \\ b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n \end{matrix}\right\}$ فإن $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)}$

والتساوي يتحقق في كلا المتباينتين إذا وفقط إذا كان $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ أو $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

**البرهان:**

عبارة عن خطوات بسيطة باستخدام متباينة إعادة الترتيب RI. افرض أن

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$$
$$b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$$

من متباينة إعادة الترتيب فإن $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ هو القيمة القصوى من بين أي عملية ضرب على هذا النمط المكون من n حدا وكل على الصورة $a_rb_s$ إذا

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$
$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \ge a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1$$
$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \ge a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2$$
$$\vdots$$
$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \ge a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}$$

نلاحظ في الجهة اليمنى أن كل $a_i$ مضروب في كل $b_i$ ولذلك بالجمع ينتج

$$\boxed{n(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) \ge (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)}$$

وبالقسمة على $n^2$ نصل للمطلوب:

$$\boxed{\frac{(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)}{n} \ge \frac{(a_1 + \cdots + a_n)}{n} \times \frac{(b_1 + \cdots + b_n)}{n}}.$$

الشق الثاني ينتج بتطبيق الشق الأول منها بعد ضرب الأعداد $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$ في $(-1)$.

**مثال12 :**

لأي أعداد حقيقية موجبة $a,b,c$ برهن أن:

$3(a^2 + b^2 + c^2) \ge (a+b+c)^2$ ؟.

**الحل :**

من متباينة شبيشيف بالنسبة للمتتابعتين: $(a,b,c)$ وَ $(a,b,c)$ نجد أن:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \ge (a+b+c)^2 \Rightarrow 3(a.a + b.b + c.c) \ge (a+b+c)(a+b+c)$$ وهو المطلوب.

### 24.1: متباينة كوشي – شوارز Cauchy–Schwarz inequality

إذا كانت $a_1,a_2,\ldots,a_n$ و $b_1,b_2,\ldots,b_n$ أعداد حقيقية غير سالبة فإن :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2} \quad \text{أو} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_i^2\right)$$

التساوي متحقق إذا وإذا فقط وجد عدد حقيقي c بحيث $a_i = cb_i$ أو $\left(\frac{a_i}{b_i}=c\right)$ لكل i.

**البرهان:**

ليكن لدينا المتتابعتين: $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$ $\quad \frac{b_i^2}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2} \;,\; \frac{a_i^2}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$

من متباينة $AM-GM$ لدينا:

$$\frac{a_1^2}{\sum a_i^2}+\frac{b_1^2}{\sum b_i^2} \ge \frac{2a_1b_1}{\sqrt{\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)}}$$

$$\frac{a_2^2}{\sum a_i^2}+\frac{b_2^2}{\sum b_i^2} \ge \frac{2a_2b_2}{\sqrt{\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_n^2}{\sum a_i^2}+\frac{b_n^2}{\sum b_i^2} \ge \frac{2a_nb_n}{\sqrt{\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)}}$$

بتجميع أطراف المتباينات معا نجد أن:

$$\left[\sum\frac{a_i^2}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sum\frac{b_i^2}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}\right] \ge \sum\frac{2a_ib_i}{\sqrt{\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)}}$$

$$\Rightarrow 2 \ge \sum\frac{2a_ib_i}{\sqrt{\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)}$$

التساوي يحصل عندما يتحقق لكل $i$ فإن: $\frac{a_i^2}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}=\frac{b_i^2}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$ ويكافئ: $\frac{a_i}{b_i}=c$ .

أخي المتدرب : نشاط رقم **31** التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

01) لأي أعداد حقيقية $a,b,c$ بين أن: $3(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2$ ؟.

02) لأي أعداد حقيقية موجبة $a,b,c$ برهن أن: $\sqrt{3x^2+xy}+\sqrt{3y^2+yz}+\sqrt{3z^2+zx}\leq 2(x+y+z)$ ؟.

03) لأي أعداد حقيقية $a,b,c$ ليست أصفار برهن أن : $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ ؟.

**مثال13 :**

لأي أعداد حقيقية $a,b,c$ بين أن: $3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$ ؟.

**الحل :**

من متباينة كوشي – شوارز نلاحظ:

$3(a^2+b^2+c^2)=(1+1+1)(a^2+b^2+c^2)=(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(1.a+1.b+1.c)^2=(a+b+c)^2$ وهو المطلوب.

**مثال14 :**

لأي أعداد حقيقية موجبة $a,b,c$ برهن أن: $\sqrt{3x^2+xy}+\sqrt{3y^2+yz}+\sqrt{3z^2+zx}\le 2(x+y+z)$ ؟.

**الحل :**

نلاحظ أن:

$$\begin{aligned}\sqrt{3x^2+xy}+\sqrt{3y^2+yz}+\sqrt{3z^2+zx}&=\sqrt{x(3x+y)}+\sqrt{y(3y+z)}+\sqrt{z(3z+x)}\\&=\sqrt{x}\sqrt{(3x+y)}+\sqrt{y}\sqrt{(3y+z)}+\sqrt{z}\sqrt{(3z+x)}\end{aligned}$$

باعتبار المتتاليتين:

$$\left(\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z}\right),\left(\sqrt{(3x+y)},\sqrt{(3y+z)},\sqrt{(3z+x)}\right)$$

وتطبيق متباينة كوشي – شوارز عليها نجد أن:

$$\begin{aligned}&\sqrt{3x^2+xy}+\sqrt{3y^2+yz}+\sqrt{3z^2+zx}\\&=\sqrt{x}\sqrt{(3x+y)}+\sqrt{y}\sqrt{(3y+z)}+\sqrt{z}\sqrt{(3z+x)}\\&\le\sqrt{(x+y+z)}\times\sqrt{[(3x+y)+(3y+z)+(3z+x)]}\qquad;\left(\sqrt{x}\right)^2=x,\left(\sqrt{(3x+y)}\right)^2=(3x+y),...\\&=\sqrt{(x+y+z)}\times\sqrt{[3x+y+3y+z+3z+x]}\\&=\sqrt{(x+y+z)}\times\sqrt{4(x+y+z)}=\sqrt{4(x+y+z)(x+y+z)}=\sqrt{4(x+y+z)^2}=2(x+y+z)\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

**مثال15:**

لأي أعداد حقيقية $a,b,c$ ليست أصفار برهن أن : $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ ؟.

**الحل:**

الطريقة الأولى: $RHS=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\le\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2}}\sqrt{\frac{b^2}{c^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}}=LHS$

الطريقة الثانية: باستخدام متباينة الوسط الحسابي– الوسط الهندسي:

$$RHS=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)=LHS$$

### 25.1: متباينة هولدر Hölder's inequality

إذا كانت $a_1,a_2,\ldots,a_n$ و $b_1,b_2,\ldots,b_n$ أعداد حقيقية غير سالبة وكان $p,q$ عددين حقيقيين موجبين بحيث $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

التساوي متحقق إذا وإذا فقط وجد عدد حقيقي c بحيث $a_i = cb_i$ لكل i. وهذه المتباينة تعميم لمتباينة كوشي شوارز.

التاريخ: / / 1430 هـ

أخي المتدرب : نشاط رقم 32

استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :

01) لتكن $a,b,c,x,y,z$ أعداد موجبة أثبت أن: $\left(\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}\right)(ax+by+cz)^2 \geq (x+y+z)^3$ ؟.

02) إذا كانت $a,b,c>0$ أثبت أن $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geq a+b+c$ ؟.

**مثال16 :**

لتكن $a,b,c,x,y,z$ أعداد موجبة أثبت أن: $\left(\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}\right)(ax+by+cz)^2 \geq (x+y+z)^3$ ؟.

**الحل :**

بكتابة المتباينة بالشكل: $x+y+z \leq \left(\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}\right)^{1/3}(ax+by+cz)^{2/3}$

لاحظ $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$. أيضا من معرفتنا بشكل متباينة هولدر نلاحظ أن $\left(a_i^p\right)^{1/p}\left(b_i^q\right)^{1/q}=a_ib_i$. بتطبيق هذه الملاحظة على مسألتنا نجد : $x=\left(\frac{x}{a^2}\right)^{1/3}(ax)^{2/3}$

وبالمثل بقية الحدود. إذا المتباينة ليست سوى متباينة هولدر :

$$x+y+z=\left(\frac{x}{a^2}\right)^{1/3}(ax)^{2/3}+\left(\frac{y}{b^2}\right)^{1/3}(by)^{2/3}+\left(\frac{z}{c^2}\right)^{1/3}(cz)^{2/3}$$

**طريقة ثانية لحل المسألة:** (مقارنة المعاملات في الطرفين)

عندما نشر طرفي المتباينة سنحصل في كل طرف على نفس الحدود $x^3,x^2y,xy^2,z^3,...$ ولكن بمعاملات قد تكون مختلفة. لذلك يكفي إثبات أن المعاملات في منشور $(x+y+z)^3$ لا تزيد عن مثيلاتها في الطرف الآخر.

$$\left(\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}\right)(ax+by+cz)^2 \geq (x+y+z)^3$$

واضح أن معامل $x^3$ هو الوحدة في ملا الطرفين.

بالنسبة لمعامل $x^2y$ في الطرف الأيسر فهو $\frac{1}{a^2}\cdot a\cdot b+\frac{1}{a^2}\cdot b\cdot a\frac{1}{b^2}\cdot a\cdot a$ ومن متباينة AM-GM فإن هذا المعامل لا يقل عن 3 حيث : $\frac{1}{a^2}\cdot a\cdot b+\frac{1}{a^2}\cdot b\cdot a\frac{1}{b^2}\cdot a\cdot a \geq 3\sqrt[3]{\frac{ab}{a^2}\cdot\frac{ba}{a^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}}=3$

بالمثل معاملات بقية الحدود مثل $xy^2,yz^2,z^2x,...$ لا تقل عن 3 وذلك من التناظر الواضح في المتباينة. معامل $xyz$ في الطرف الأيسر يساوي: $\frac{2}{a^2}b\cdot c+\frac{2}{b^2}c\cdot a+\frac{2}{c^2}a\cdot b \geq 6$

إذا جميع المعاملات في الطرف الأيمن للمتباينة لا تزيد عن مثيلاتها في الطرف الأيمن وهذا يثبت المتباينة.

**مثال17 :**

إذا كانت $a,b,c>0$ أثبت أن $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geq a+b+c$ ؟.

**الحل:**

الطريقة الأولى: أضرب الطرفين في $(b+c+a)^2$ وطبق متباينة هولدر.

$\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)(b+c+a)^2 \geq (a+b+c)^3$ ولاحظ أن: $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^1 b^2=a^3$.

**الطريقة الثانية :** لاحظ أن $\frac{a^3}{b^2}+b+b \ge 3a$ وذلك من AM-GM. (هذه المتباينة ممكنة أيضا باستخدام أسلوب مستقيم المماس باعتماد المماس للدالة $f(x)=x^3$ عند $(1,1)$ وهو $y=3x-2$ ، إذا $x^3 \ge 3x-2$ )

**الطريقة الثالثة:** استخدم متباينة إعادة الترتيب.

## 26.1: متباينة مينكوسكي Minkowski's inequality

إذا كانت $a_1,a_2,\ldots,a_n$ و $b_1,b_2,\ldots,b_n$ أعداد حقيقية غير سالبة وكان $p \ge 1$ عدد حقيقي فإن

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}$$

عندما $p>1$ فإن التساوي متحقق إذا وإذا فقط وجد عدد حقيقي **c** بحيث $a_i=cb_i$ لكل **i**. أما عندما $p=1$ فالتساوي متحقق دائما.

## 27.1: متباينة برنوللي Bernoulli's inequalities

إذا كان $\alpha \ge 1$ أو $\alpha \le 0$ عدد حقيقي وكان $x>-1$ فإن

$$(x+1)^\alpha \ge 1+\alpha x$$

و إذا كان $0<\alpha<1$ وكان $x>-1$ فإن

$$(x+1)^\alpha \le 1+\alpha x$$

## 28.1: متباينة شور Schur's Inequlaity

إذا كانت $a,b,c$ أعداد حقيقية غير سالبة وكان $r>0$ عدد حقيقي فإن

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-a)(b-c)+c^r(c-a)(c-b)\geq 0$$

والتساوي متحقق إذا وإذا فقط كان $a=b=c$ أو كان اثنان من $a,b,c$ متساويان والثالث صفر.

إذا كان $r=1$ فإن لمتباينة شور صور أخرى مفيدة منها:

1) $a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

2) $abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

3) وإذا كان $a+b+c=1$ فإن $\dfrac{1+9abc}{4}\geq ab+bc+ca$

**البرهان:**

بما أن المتباينة متناظرة بالنسبة للمتغيرات $a,b,c$ يمكن أن نفرض أن $a\geq b\geq c$ وعليه يمكن كتابة المتباينة بالشكل

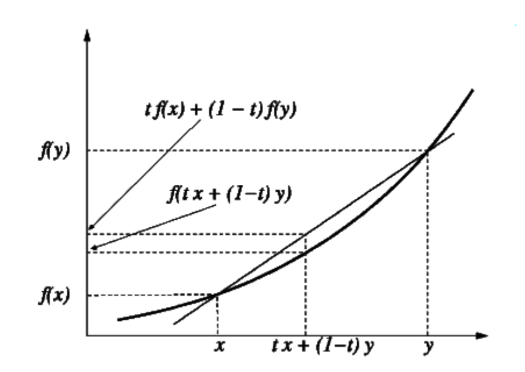
$$(a-b)[a^r(a-c)-b^r(b-c)]+c^r(c-a)(c-b)\geq 0$$

واضح أن الحد الأخير $c^r(c-a)(c-b)\geq 0$ . بالنسبة للجزء المتبقي، بما أن $a-c\geq b-c\geq 0$ وبما أن $a^r\geq b^r\geq 0$ فإن

$$a^r(a-c)-b^r(b-c)\geq 0$$

وعليه فإن $(a-b)[a^r(a-c)-b^r(b-c)]\geq 0$ وتثبت المتباينة.

## 29.1: الدالة المحدبة والدالة المقعرة




نقول عن الدالة الحقيقية f المعرفة على الفترة I أنها محدبة convex إذا كان

$$f(ax+by) \le af(x)+bf(y)$$

وذلك لأي $x,y \in I$ ولأي $a,b>0, a+b=1$.

كما تسمى محدبة فعليا strictly convex إذا كان لأي $x \ne y$ ولأي $a,b>0, a+b=1$ فإن

$$f(ax+by) < af(x)+bf(y)$$

تسمى الدالة $f$ مقعرة concave إذا كان $-f$ محدبة، إذا $f$ مقعرة إذا كان

$$f(ax+by) \ge af(x)+bf(y)$$

وذلك لأي $x,y \in I$ ولأي $a,b>0, a+b=1$. كما تسمى مقعرة فعليا strictly concave إذا كانت $-f$ محدبة فعليا، إذا $f$ مقعرة فعليا إذا كان لأي $x \ne y$ ولأي $a,b>0, a+b=1$ فإن

$$f(ax+by) > af(x)+bf(y)$$

**المعنى الهندسي للتحدب:** هندسيا النقطة $ax+by$ تقع على القطعة الواصلة بين $x,y$ وكذلك $af(x)+bf(y)$ تقع على القطعة الواصلة بين $f(x),f(y)$ ولذلك فإن شرط الدالة المحدبة يعني أن منحنى الدالة المحدبة ما بين $x,y$ يقع على أو تحت القطعة الواصلة بين النقطتين $(x,f(x))$ و $(y,f(y))$ من المنحنى. أما إذا كانت الدالة محدبة فعليا فإن الجزء المذكور من المنحنى يقع بكامله تحت القطعة.

### أشهر الدوال المحدبة

الدالة $e^x$ على R وبشكل عام الدالة الأسية $f(x)=a^x$ محدبة فعليا

الدالة $x^{2n}$ على R حيث n عدد صحيح موجب.

الدالة $x^r$ على $(-\infty,0]\cup[1,\infty)$ حيث $r\geq 1$ عدد حقيقي.

الدالة $\dfrac{a}{b+x}$ على $(-b,\infty)$ حيث $a>0$ و b أي عدد حقيقي.

الدالتان $-\sin x, -\cos x$ على $[0,\pi]$.

الدالتان $\sin x, \cos x$ على $[\pi,2\pi]$.

الدالة $\tan x$ على $[0,\pi/2)$.

### أشهر الدوال المقعرة

1) الدالة $f(x)=x^p$ مقعرة فعليا حيث $x\geq 0$ و $0<p<1$. كحالة خاصة $f(x)=\sqrt{x}$.

2) الدالة اللوغاريتمية $f(x)=\log x$ محدبة فعليا على مجالها.

حقائق في الدوال المحدبة

1) إذا كانت $f,g$ محدبتين فإن مجموعهما و $\max f,g$ .

إذا كانت $f,g$ محدبتان و $g$ تزايدية فإن $g\circ f$ محدبة.

2) الدالة $f$ محدبة على فترة $I$ إذا وإذا فقط كانت $f(\frac{x+y}{2})\leq\frac{f(x+y)}{2}$ لكل $x,y\in I$ وتكون $f$ محدبة فعليا إذا وإذا فقط كانت هذه المتباينة فعلية.

3) الدالة $f$ القابلة للاشتقاق على الفترة $I$ محدبة على $I$ إذا وإذا فقط $f(x)-f(y)\geq f'(y)(x-y)$ لكل $x,y\in I$ وتكون $f$ محدبة فعليا إذا وإذا فقط كانت هذه المتباينة فعلية.

4) الدالة $f$ القابلة للاشتقاق مرتين على الفترة $I$ محدبة على $I$ إذا وإذا فقط $f''(x)\geq 0$ لكل $x\in I$. تكون $f$ محدبة فعليا إذا وإذا فقط كانت هذه المتباينة فعلية، أي $f''(x)>0$ لكل $x\in I$

### القيم القصوى والدالة المحدبة

1) القيمة الصغرى المحلية لدالة محدبة هي قيمة صغرى مطلقة. بمعنى إذا $f$ دالة محدبة على الفترة $I$ وكانت $J\subset I$ فترة مفتوحة تحوي النقطة c بحيث أن $f(c)\leq f(x)$ لكل $x\in J$ فإن $f(c)\leq f(x)$ لكل $x\in I$.

2) تحرز الدالة المحدبة قيمتها العظمى عند أحد طرفي الفترة.

## متباينة جنسن Jensen's Inequality

إذا كانت $f:I\to\mathbb{R}$ دالة محدبة معرفة على فترة $I$ ولدينا $x_1,x_2,\dots,x_n\in I$ فإن

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}$$

وإذا كانت $f$ محدبة فعليا strictly convex فإن التساوي متحقق إذا وفقط إذا كانت جميع $x_i$ متساوية.

أما إذا كانت $f:I\to\mathbb{R}$ دالة مقعرة فإن $-f$ محدبة ولذلك تنعكس المتفاوتة في هذه الحالة، أي أن

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

## 30.1: متباينة يونغ Young's Inequality

إذا كان $a,b\ge 0$ وكان $p,q$ أعداد حقيقية موجبة بحيث $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ فإن

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

والتساوي يتحقق إذا وفقط إذا كان $a^p=b^q$.

**البرهان:**

إذا كان $a$ أو $b$ صفر فالنتيجة واضحة، لذلك نفرض أن $a,b$ أعداد موجبة. بما أن $e^x$ دالة محدبة فإن

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}=\frac{e^{p\ln a}}{p}+\frac{e^{q\ln b}}{q}\ge e^{\frac{1}{p}(p\ln a)+\frac{1}{q}(q\ln b)}=e^{\ln ab}=ab$$

عندما $a^p=b^q$ فإن $ab=a\cdot a^{p/q}=a^{p(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}=a^p=a^p\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ أي أن التساوي متحقق في هذه الحالة.

أخي المتدرب : نشاط رقم **33** التاريخ / / 1430 هـ

**استعن بالله وحاول الإجابة عن النشاط التالي استعدادا لمناقشته إن شاء الله تعالى :**

إذا كانت $a,b,c,d$ أعداد موجبة برهن أن $\frac{4}{3} \geq \frac{d}{a+b+c} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{a}{b+c+d}$ ؟.

**مثال18:**

إذا كانت $a,b,c,d$ أعداد موجبة برهن أن $\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}\geq\frac{4}{3}$ ؟.

**الحل:**

سيكون بأكثر من طريقة

الطريقة الأولى: $A(a,b,c,d)=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}$

المتباينة متجانسة حيث $A(ka,kb,kc,kd)=A(a,b,c,d)$ لذلك يمكن فرض $a+b+c+d=1$ وتصبح المتباينة بالشكل

$\sum\frac{a}{1-a}\geq\frac{4}{3}$ والدالة $f(x)=\frac{x}{1-x}$ محدبة وبالتالي $\sum\frac{a}{1-a}\geq 4\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$

الطريقة الثانية:

$$A(a,b,c,d)=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}=$$
$$\frac{a^2}{ab+ac+ad}+\frac{b^2}{bc+bd+ab}+\frac{c^2}{cd+ac+bc}+\frac{d^2}{ad+bd+cd}\geq$$
$$\frac{(a+b+c+d)^2}{2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd}\geq\frac{4}{3}$$

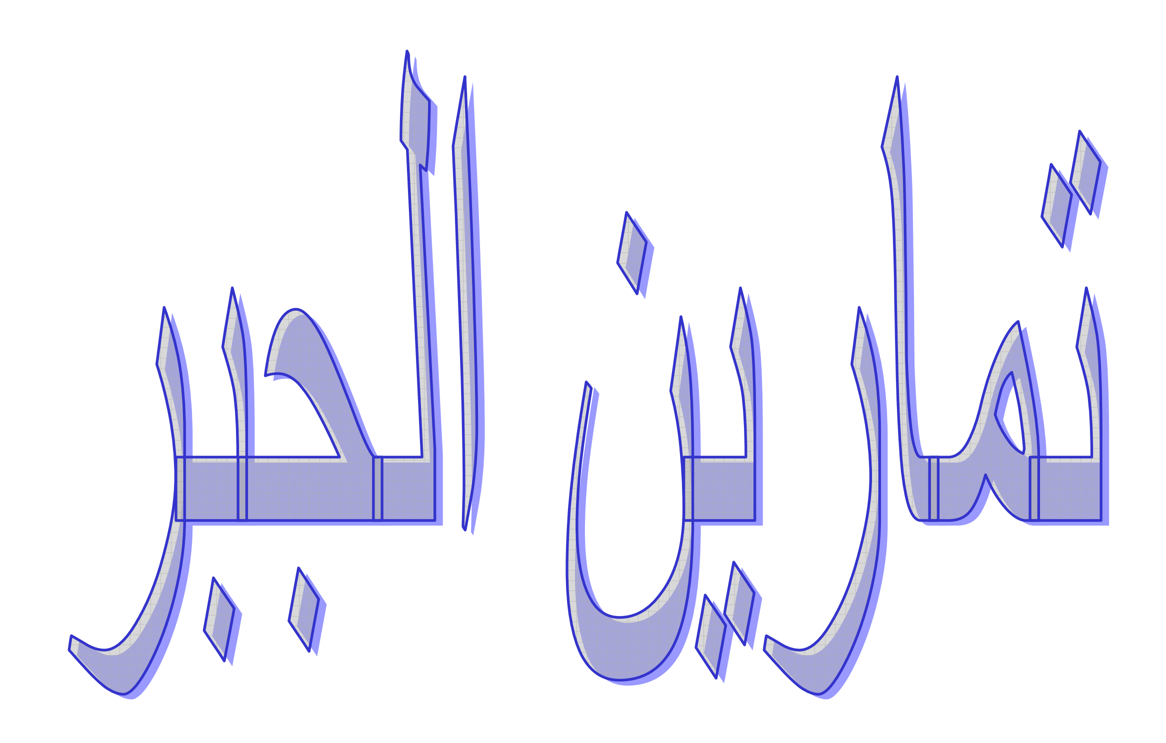
الطريقة الثالثة:

بشكل عام $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i}\geq\frac{n}{n-1}$ حيث $S=a_1+a_2+\ldots+a_n$ ، $a_i>0$

الطريقة الرابعة: بواسطة AM-GM المعممة $\frac{a}{b+c+d}\geq\frac{4}{3}\cdot\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}+d^{\frac{4}{3}}}$ ثم أتم الجمع.

الطريقة الخامسة: المتتابعتين $\left(\frac{1}{b+c+d},\frac{1}{a+c+d},\frac{1}{a+b+d},\frac{1}{a+b+c}\right)$ $(a,b,c,d),$ بنفس الترتيب إذا من متباينة شيبيشف:

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}\geq$$
$$\geq\frac{1}{4}(a+b+c+d)\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+b+c}\right)$$
$$=\frac{1}{12}\sum_{cyc}(a+b+c)\sum_{cyc}\frac{1}{a+b+c}\geq\frac{1}{12}\cdot 16=\frac{4}{3}$$


تمارين الجبر

حلل المقادير التالية :

01) $a^4-b^4$
02) $(x^3+y^2)-(y^3+x^2)$
03) $(a^2+9b^2-1)^2-36a^2b^2$
04) $(x+y)(x-y)+4(y-1)$
05) $(c^2+d^2-b^2-a^2)^2-4(ab-cd)^2$
06) $x^4+y^4+x^2y^2$
07) $x^8+x^6+x^4+x^2+1$
08) $x^3+2x^2y+y^3+2xy^2$
09) $x^3+2x^2y+y^3+2xy^2$
10) $x^4-13x^2+36$
11) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$
12) $4x^3-31x+15$

13) إذا كانت $a,b,c$ أعداد حقيقية موجبة ،برهن أن: $a^4+b^4+c^2\geq 2\sqrt{2}abc$ ؟.

14) برهن أنه أي عدد حقيقي $x$ يحقق المتباينة: $x^4-x+\frac{1}{2}>0$ ؟.

15) برهن أنه إذا كانت $a,b,c$ أعداد حقيقية بحيث $a^3+b^3+c^3\neq 0$ فإن:

$$\frac{2abc-(a+b+c)}{a^3+b^3+c^3}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow a+b+c=0$$ ؟.

16) بسط المقدار: $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{4}{x^2+1}-\frac{8}{x^2+1}$ ؟.

17) لتكن $x,y,z$ أعداد صحيحة متمايزة بحيث $xy+yz+zx=26$ ،أثبت أن: $x^2+y^2+z^2\geq 29$ ؟.

18) أوجد العلاقة بين الأعداد $a,b,c$ إذا كانت $x+\frac{1}{x}=a \quad ,y+\frac{1}{y}=b \quad ,xy+\frac{1}{xy}=c$ ؟.

19) إذا كانت $a,b,c$ أطوال أضلاع مثلث ، فبرهن أن: $3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3$ ؟.

20) برهن أنه يوجد على الأقل 1430 عدد قياسي $m$ بحيث أن كل من $\sqrt{m+1430}$ ، $\sqrt{m+1431}$ أعداد قياسية ؟.

21) لتكن $a,b,c,d$ أعداد حقيقية بحيث: $(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)>(ac+bd-1)^2$ ، برهن أن:

$a^2+b^2>1$ ، $c^2+d^2>1$ ؟.

22) أوجد المجموع $\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$ ؟.

23) إذا كان $a^2+a^{-2}=4$ فأوجد $a^6+a^{-6}$ ؟.

24) إذا كان $x+\frac{1}{x}=5$ فاحسب $x^2+\frac{1}{x^2}$ و $x^4+\frac{1}{x^4}$ ؟.

25) احسب قيمة المقدار : $\frac{22223^3+11112^3}{22223^3+11111^3}$ ؟.

26) إذا كانت $a+b+c=0$، أحسب قيمة المقدار: $\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$ ؟.

27) وضح أن : $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{1024})=\frac{1-x^{2048}}{1-x}$ ؟.

28) أثبت أن : $2^{15}+3^9$ تقبل القسمة على 59 ؟.

29) أوجد : $\sqrt{(1000)(1001)(1002)(1003)+1}$ ؟.

30) قارن بين : $B=\frac{5678901235}{6789012347}$ ، $A=\frac{5678901234}{6789012345}$ ؟.

31) بسط : $\sqrt{9-2\sqrt{23-6\sqrt{10+4\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}}$ ؟.

32) إذا كانت $a,b,c\in\mathbb{R}$ و كانت $a+b+c=26$ و $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=28$ أوجد : $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$ ؟.

33) إذا كان $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ فأوجد $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ ؟.

34) إذا كان $a^3-b^3=24$ وَ $a-b=2$ . جد $(a+b)^2$ ؟.

35) أوجد قيمة $m$ التي تجعل المقدار $\frac{(x+2)x+m^2-1}{mx-2m+18}$ لا يعتمد إطلاقًا على قيمة $x$؟.

36) إذا كان $x+\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ حيث $x\in\mathbb{R}$ فاوجد قيمة: $x^2+\sqrt{x^4-1}+\frac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}}$ ؟.

37) ليكن $r$ عدد حقيقي موجب بحيث $\sqrt[4]{r}-\frac{1}{\sqrt[4]{r}}=14$ . أثبت أن: $\sqrt[6]{r}+\frac{1}{\sqrt[6]{r}}=6$ ؟.

38) حلل المقدار لعوامل حقيقية $1-\sin^5\alpha-\cos^5\alpha$ ؟.

39) أحسب $\binom{1430}{2}+\binom{1430}{5}+\binom{1430}{8}+...+\binom{1430}{1430}$ ؟

40) إذا كانت جميع معاملات كثيرة الحدود $f_{(x)}$ موجبة حيث: $f_{(x)}=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+1$ وكانت الـــ: $n$ جذرا لــ: $f_{(x)}=0$ حقيقية، برهن أن $f_{(2)}\geq 3^n$ ؟.

41) لتكن $f_{(x)}=x^3+x^2+ax+b$ كثيرة حدود جميع جذورها أعداد حقيقية سالبة، برهن أن: $4a-9b\leq 1$ ؟.

42) أوجد قيمة $a$ بحيث يكون $-1$ جذر مكرر مرتين للمعادلة $x^5-ax^2-ax+1=0$ ؟.

43) أوجد باقي قسمة $f(x)=1-x+2x^2-3x^6+4x^{16}-5x^{25}+6x^{36}+x^{2005}$ على $h(x)=x^2-1$ ؟.

44) أوجد كثيرة الحدود $f_{(x)}$ بحيث أن $f_{(x)}$ تقبل القسمة على $x^2+1$ وكثيرة الحدود $(f_{(x)}+1)$ تقبل القسمة على $x^3+x^2+1$ ؟.

45) برهن أن كثيرة الحدود $f_{(x)}=x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+...+x^{1111}+1$ تقبل القسمة على كثيرة الحدود $g_{(x)}=x^9+x^8+x^7+...+x+1$ ؟.

46) ماهي قيم $n$ التي تجعل كثيرة الحدود: $f_{(x)}=1+x^2+x^4+...+x^{2n-2}$ تقبل القسمة على كثيرة الحدود: $g_{(x)}=1+x+x^2+...+x^{n-1}$ ؟.

47) لتكن $a,b$ عددين حقيقين غير صفريين ،ويحققان المعادلة: $a^2b^2(a^2b^2+4)=2(a^6+b^6)$ .برهن أن $a,b$ ليس كلاهما نسبي ؟.

48) إذا كان $\alpha,\beta,\gamma$ جذور للمعادلة $2x^3+x^2-5x-3=0$ فأوجد المعادلة التي جذورها $\alpha^2,\beta^2,\gamma^2$ ؟.

49) إذا كان $\alpha,\beta,\gamma$ جذور للمعادلة $x^3-x-1=0$ فاحسب قيمة المقدار: $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ ؟.

50) إذا كانت $p(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة بحيث أن : $p(1)=1,p(2)=2,p(3)=3,p(4)=4$ فأوجد $p(6)$ ؟.

51) لتكن $p(x)$ كثيرة حدود من الدرجة $n$ بحيث $p(k)=\frac{k}{k+1}$ لكل $k=0,1,...,n$ .احسب قيمة $p(n+1)$ ؟.

52) إذا كان حاصل ضرب جذرين من الجذور الأربعة للمعادلة $x^4-18x^3+kx^2+200x-1984=0$ يساوي $-32$ ، فأوجد قيمة $k$ ؟.

53) تحقق من صحة المساواة: $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$ ؟.

54) لتكن $a,b,c$ أعداد حقيقية غير سالبة بحيث $a+b+c=1$ ،برهن أن: $4(ab+bc+ca)-9abc\le 1$ ؟.

55) أوجد حلول المعادلة: $x^4-(2m+1)x^3+(m-1)x^2+(2m^2+1)x+m=0$ حيث $m$ معامل حقيقي ؟.

56) لتكن $a,b,c$ ثلاثة أعداد حقيقية مختلفة ، برهن أن: $\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{b-c}+\sqrt[3]{c-a}\neq 0$ ؟.

57) لتكن كثرة الحدود $f_{(x)}=x^3-3x+1$ ، أوجد كثيرة الحدود $h_{(x)}$ بحيث تكون جذورها عبارة عن القوة الخامسة لجذور كثيرة الحدود $f_{(x)}$ ؟.

58) كثيرة الحدود $1-x^1+x^2-x^3+...+x^{16}-x^{17}$ يمكن كتابتها بالشكل $a_0+a_1y+a_2y^2+...+a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17}$ حيث $y=x+1$ وَ $a_i's$ أعداد ثابتة والمطلوب إيجاد $a_2$ ؟.

59) أوجد جذور كثير الحدود: $f_{(x)}=x^4-6x^3+18x^2-30x+25$ ،حيث بأن مجموع جذرين من الجذور هو 4 ؟.

60) أوجد كثيرة الحدود $f_{(x)}$ والتي معاملاتها أعداد صحيحة ولها الجذر $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ ؟.

61) إذا كانت $\alpha,\beta$ جذري المعادلة $x^2+px+1=0$ ،وكانت $\gamma,\delta$ جذري المعادلة $x^2+qx+1=0$ فبرهن أن: $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2$ ؟.

62) كثيرة الحدود $x^2-9x+3$ لها جذران $r,s$ وكثيرة الحدود $x^2+bx+c$ لها جذران $r^2,s^2$ . فأوجد قيمة $b,c$ ؟.

63) إذا كان $a-b$ , $a$ , $a+b$ هم أصفار المعادلة: $x^3-21x^2+131x-231=0$ ،فأوجد قيمة $b$ ؟.

64) أوجد جميع قيم $p$ التي تجعل حلول المعادلة التالية أعداد صحيحة: $x^2-2px+p^2-5p-1=0$ حيث $p$ عدد أولي؟

65) إذا كان $a,b$ حلين للمعادلة $2x^2-3x+m=0$ ، و كان $a=2b$ فأوجد قيمة $m$ ؟.

66) أوجد مجموع الجذور و مجموع مربعات الجذور و مجموع مقلوبات الجذور للمعادلة: $2x^3-x+2=0$ ؟.

67) إذا كان $a,b,c$ حلول للمعادلة $x^3-2x^2-5x+8=0$ فأوجد : $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$ ؟.

68) إذا كان $r_1,r_2$ جذري المعادلة فأوجد كل من :

$$i)\ r_1^2+r_2^2 \quad , \quad ii)\ \frac{r_2}{r_1}+\frac{r_1}{r_2}$$
$$iii)\ (r_1-r_2)^2 \quad , \quad iv)\ (r_1-2)(r_2-2)$$
؟.

69) إذا كانت $p(x)$ كثيرة حدود واحدية من الدرجة الرابعة و تحقق أن : $p(3)=30, p(2)=20, p(1)=10$ ، فأوجد $p(12)+p(-8)$ ؟.

70) إذا كانت $\alpha,\beta,\gamma$ جذور المعادلة $x^3-x^2+1=0$ فأوجد : $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$ ؟.

71) برهنأنه إذاكانت متحققة $a^2+ab+ac<0$ فإن: $b-4ac>0$ ؟.

72) ليكن $r_1,r_2$ جذور كثيرة الحدود $f_{(x)}=x^2-(a+d)x+(ad-bc)$ بين أن $r_1^3,r_2^3$ جذور لكثيرة الحدود $h_{(x)}=x^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)x+(ad-bc)^3$ ؟.

73) بين أنه إذا كانت $a,b,c$ أطوال أضلاع مثلث فإنه لايوجد حل حقيقي للمعادلة التالية:

$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ ؟.

74) حل المعادلة : $(x-5)(x-7)(x+6)(x+4)=504$ ؟.

75) حل المعادلة : $12x^4-56x^3+89x^2-56x+12=0$ ؟.

76) حل المعادلة : $x^4+(2-x)^4=32$ ؟.

77) لنفرض أنه لدينا $a_1<a_2<...<a_n$ أعداد حقيقية.برهن أن: $a_1a_2^4+a_2a_3^4+...+a_na_1^4 \ge a_2a_1^4+a_3a_2^4+...+a_1a_n^4$ ؟

78) المعادلة التالية طمست معاملاتها وكتبت على سبورة الفصل بالشكل: $x^3+...x^2+...x+...=0$

قام طالبان بلعبة وصفها بعد خطوة واحدة للاعب الأول يختار عدد ليقوم اللاعب الثاني بكتابته على أحد الفراغات في المعادلة على السبورة، وتنتهي اللعبة بعد ثلاث خطوات (علما بأن اللاعب الأول يختار عددا في كل خطوة من الخطوات الثلاث). **هل** من الممكن للاعب الأول أن يختار ثلاثة أعداد لتكون ثلاثة جذور صحيحة ومتمايزة للمعادلة السابقة مهما كانت طريقة توزيع اللاعب الثاني للأعداد المختارة من اللاعب الأول؟.

79) معادلة كثيرة الحدود $x^3-6x^2+5x-1=0$ لها الجذور الحقيقية $a,b,c$ أوجد قيمة $a^5+b^5+c^5$ ؟.

80) أوجد جميع جذور المعادلة: $f_{(x)}=a.\cos(x+1)+b.\cos(x+2)+c.\cos(x+3)$ ،مع العلم أن: المعاملات $a,b,c$ أختيرت بحيث يكون لهذه المعادلة جذرين على الأقل في الفترة $(0,\pi)$ ؟.

81) لتكن $f_{(x)}$ كثيرة حدودمعاملاتها أعداد حقيقية موجبة، رهن أن: $\sqrt{f(a)f(b)}=f(\sqrt{ab})$ لكل الأعداد الحقيقية الموجبة $a,b$ ؟.

82) إذا كانت $f_{(x)}=ax^2+bx+c$ كثيرة حدود جميع معاملاتها أعداد حقيقية موجبة بحيث $a+b+c=1$ .برهن أن المتباينة: $f(x_1)f(x_2)..f(x_n)\ge 1$ متحققة لجميع الأعداد الموجبة $x_1,x_2,...,x_n$ التي تحقق $x_1x_2...x_n=1$ ؟.

83) إذا كان: $8^f=9$ , $7^e=8$ , $6^d=7$ , $5^c=6$ , $4^b=5$ , $3^a=4$ فأوجد قيمة: $a\times b\times c\times d\times e\times f$ ؟.

84) لتكن $x,y$ أعداد من الفترة $(0,1)$ تحقق الخاصية يوجد عدد حقيقي موجب $a\neq 1$ بحيث:

$\log_x a+\log_y a=4\log_{xy} a$ برهن أن: $x=y$ ؟.

85) بسط المقدار $\frac{1}{\log_a(abc)}+\frac{1}{\log_b(abc)}+\frac{1}{\log_c(abc)}$ حيث $a,b,c$ أعداد حقيقية موجبة؟.

86) أحسب: $a=\frac{(11+6\sqrt{2})\sqrt{11-6\sqrt{2}}-(11-6\sqrt{2})\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{(\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2})-(\sqrt{\sqrt{5}+1})}$ ؟.

87) إذا كانت $N=\sqrt{7\sqrt{3\sqrt{7\sqrt{3\sqrt{7\sqrt{3...}}}}}}$ فأحسب $N^3$ ؟.

88) أنطق المقام: $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$ ؟.

89) ليكن $N=\underbrace{44...4}_{2002}\underbrace{88...8}_{2001}9$، أحسب $\sqrt{N}$ ؟.

90) هل يوجد عدد صحيح $N$ بحيث: $(\sqrt{2009}-\sqrt{2008})^{2010}=\sqrt{N}-\sqrt{N-1}$ ؟.

91) لأي عدد طبيعي $N$، برهن أن: $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4...\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}}<3$ ؟.

92) برهن أن $\frac{1}{\log_2 X}+\frac{1}{\log_3 X}+\frac{1}{\log_4 X}+...+\frac{1}{\log_{100} X}=\frac{1}{\log_{100!} X}$ ؟.

93) ما هي القيم الممكنة لـــ: $a$ إذا كان $\log_a\sqrt{2}<1$ ؟.

94) إذا كانت $a,x,y$ أعداد حقيقية بحيث $0<a<1$ وَ $x^2+y=0$، برهن أن: $\log_a(a^x+a^y)\leq\log_a 2+\frac{1}{8}$ ؟.

95) أوجد صيغة لإيجاد المجموع : $1^2+2^2+3^2+...+n^2$ حيث $n$ عدد صحيح موجب؟

96) إذا كانت $a,b,c$ أعداد حقيقية غير صفرية بحيث أن: $(ab+bc+ca)^3=abc(a+b+c)^3$ برهن أن $a,b,c$ حدود متتالية هندسية ؟.

97) أوجد أقل حد في المتتالية: $\sqrt{\frac{7}{6}}+\sqrt{\frac{96}{7}},\sqrt{\frac{8}{6}}+\sqrt{\frac{96}{8}},\sqrt{\frac{9}{6}}+\sqrt{\frac{96}{9}},...\sqrt{\frac{95}{6}}+\sqrt{\frac{96}{95}}$ ؟.

98) لتكن $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ متتالية حسابية فرقها العام $d$ هو: ، أحسب $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$ ؟.

99) المتتالية $(a_n)$ معرفة بالشكل: $a_0=1$ ، $a_1=1$ وً $a_n=a_{n-1}+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$ لكل $n\geq 2$. كما أن:

متتالية $(b_n)$ معرفة بالشكل: $b_0=1$ ، $b_1=3$ وً $b_n=b_{n-1}+\frac{b_{n-1}^2}{b_{n-2}}$ لكل $n\geq 2$، أوجد $\frac{b_{32}}{a_{32}}$ ؟.

100) برهن أن: $\sum_{m=0}^{1005}\frac{(-1)^m}{2009-m}\binom{2009-m}{m}=\frac{1}{1005}$ ؟.

101) لنعتبر المجموع: $S=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{99.100}$، والمطلوب إيجاد متتالية المجاميع الجزئية لحدود متتابعة من $S$ بحيث يكون مجموعها مساويا $\frac{1}{6}$ ؟.

102) أوجد جميع متسلسلات الأعداد $a_1,a_2,...,a_{2009}$ بحيث: $\sum_{k=1}^{2009}2^{k-1}(a_k)=2008\prod_{k=1}^{2009}a_k$ ؟.

103) أثبت أن : $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{1935}+\sqrt{1936}}=43$ ؟.

104) أوجد قيمة : $\frac{1}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}}$ ؟.

105) احسب قيمة : $\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$ ؟.

106) برهن أن: $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times...\times\frac{999999}{1000000}<\frac{1}{1000}$ ؟.

107) احسب قيمة : $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{2009}{2010!}$ ؟.

108) أوجد قيمة المقدار: $\frac{3}{1^2.2^2}+\frac{5}{2^2.3^2}+\frac{7}{3^2.4^2}+...+\frac{29}{14^2.15^2}$

109) احسب قيمة : $\sum_{k=0}^{100}\frac{1}{4k^2-1}$ ؟.

110) أوجد : $\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+...+\frac{2009}{2007!+2008!+2009!}$ ؟.

111) أحسب $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!(n+k)!}$ ؟.

112) أي العددين أكبر: $\frac{1}{2}$ أو $\prod_{n=1}^{25}(1-\frac{n}{365})$ ؟.

113) لتكن $a_1,a_2,...,a_n,...$ متتالية غير منتهية وتحقق العلاقة: $b_{m-n}+b_{m+n}=b_{2m}+b_{2n}$ لجميع الأعداد الصحيحة غير السالبة $m,n$ بحيث أن $0\le n\le m$، برهن أن جميع حدود المتتالية متساوية ؟.

114) بسط : $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})...(1+\frac{1}{3^{2^n}})$ ؟.

115) بسط: $cox\,\alpha.cox\,2\alpha.cox\,4\alpha..cox\,2^n\,\alpha$ ؟.

116) أحسب المجموع: $S=\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^2}{1-3x_i+3x_i^2}$ حيث $x_i=\frac{i}{101}$ لكل $i=0,1,...,101$ ؟.

117) متتالية الأعداد الحقيقية الموجبة $(a_n)$ تحقق $\sum_{i=1}^{n}a_i^3=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة $n$ ،برهن أن: $a_n=n$ لجميع $n$ ؟.

118) جزء الكسر التالي: $\frac{3x+2}{x^2+x}$ ؟.

119) جزء الكسر التالي: $\frac{8-2x}{(x-3)(x-1)}$ ؟.

120) جزء الكسر التالي: $\frac{8x-12}{x^2-2x-3}$ ؟.

121) جزء الكسر التالي: $\frac{2x^2+5x+12}{x^3+x^2-6x}$ ؟.

122) جزء الكسر التالي: $\frac{x^2+2x+3}{(x+2)^3}$ ؟.

123) حل النظام التالي :

$$\begin{cases} x-y=10 \\ x^2-4x+y^2=52 \end{cases}$$ ؟.

124) حل النظام التالي :

$$\begin{cases} x^3+y^3=126 \\ x^2-xy+y^2=21 \end{cases}$$ ؟.

125) حل النظام التالي في $\mathbb{Z}$ :

$$\begin{cases} x+y+z=180 \\ x+y+w=197 \\ x+z+w=208 \\ y+z+w=222 \end{cases}$$ ؟.

126) حل المعادلة : $9^x-3^{x+1}-4=0$ ؟.

127) أوجد جميع الحلول الحقيقية للمعادلة $2^x+3^x+6^x=x^2$ ؟.

128) أوجد حل نظام المعادلات التالي :

$$\begin{cases} x+\frac{3x-y}{x^2+y^2}=3 \\ y-\frac{x+3y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$$ ؟.

129) أوجد حل نظام المعادلات التالي في مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ xy+z+v=23 \\ xv+yz=28 \\ zv=12 \end{cases}$$ ؟.

130) أوجد جميع الثلاثيات $(x,y,z)$ في مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق نظام المعادلات التالي:

$$\begin{cases} xy=z^2 \\ x+y+z=7 \\ x^2+y^2+z^2=133 \end{cases}$$ ؟.

131) أوجد جميع الحلول الحقيقية للمعادلة: $\sqrt{x^2+2px-p^2}-\sqrt{x^2-2px-p^2}=1$ حيث عدد $p$ حقيقي موجب؟

132) أوجد حلول النظام:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=15 \\ x^5+y^5+z^5=83 \end{cases}$$ ؟.

133) أوجد جميع الأعداد الحقيقية $x$ بحيث: $\frac{8^x+27^x}{12^x+18^x}=\frac{7}{6}$ ؟.

134) أوجد جميع حلول النظام التالي:

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{4z-1} \\ y+z=\sqrt{4x-1} \\ z+x=\sqrt{4y-1} \end{cases}$$ ؟.

135) برهن أن الحل الموجب الوحيد لنظام المعادلات:

$$\begin{cases} x+y^2+z^3=3 \\ y+z^2+x^3=3 \\ z+x^2+y^3=3 \end{cases}$$ ،

هو: $(x,y,z)=(1,1,1)$ ؟.

136) أوجد حل النظام:

$$\begin{cases} \sqrt{x}-\frac{1}{y}-2w+3z=1 \\ x+\frac{1}{y^2}-4w^2-9z^2=3 \\ x\sqrt{x}-\frac{1}{y^3}-8w^3+27z^3=-5 \\ x^2+\frac{1}{y^4}-16w^4-81z^4=15 \end{cases}$$ ؟.

137) أوجد حل المعادلة التالية في مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة: $x^y.y^x+x^y+y^x=5329$ ؟.

138) أوجد الحل الموجب لنظام المعادلات: $x_1+\frac{1}{x_2}=, x_2+\frac{1}{x_3}=1,\ldots,x_{99}+\frac{1}{x_{100}}=4,x_{100}+\frac{1}{x_1}=1$

139) أوجدالحلول الحقيقية للمعادلة: $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$ ؟.

140) أوجد جميع الأزواج $(x,y)$ الصحيحة بحيث: $x^3=y^3+2y^2+1$ ؟.

141) أوجد جميع الأعداد الحقيقية التي تحقق:

$$\begin{cases} \frac{1}{4^x}+\frac{1}{27^y}=\frac{5}{6} \\ \log_{27}y-\log_4 x\geq\frac{1}{6} \\ 27^y-4^x\leq 1 \end{cases}$$ ؟.

142) أوجد الحل الحقيقي لنظام المعادلات:

$$\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7 \end{cases}$$ ؟.

143) أوجد العلاقة بين $a,b,c$ عندما يوجد حل للنظام التالي: $x+y=a,x^2+y^2=b,x^3+y^3=c$ ؟.

144) أوجد الحد العام للمتتالية التي المعرفة بالشكل: $x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n , x_1 = 4, x_0 = 3$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$ ؟.

145) ليكن $a,b$ عددين مركبين برهن أن: $|1+ab|+|a+b| \geq \sqrt{|a^2-1|.|b^2-1|}$ ؟.

146) إذا كانت $a,b,c$ أعداد مركبة غير صفرية تحقق: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$ ،أوجد القيمة أو القيم الممكنة للمقدار: $\frac{a+b-c}{a-b+c}$ ؟

147) لنيكن $\alpha,\beta$ عددين مركبين مترافقين بحيث أن: $\frac{\alpha}{\beta^2}$ عدد حقيقي وً $|\alpha-\beta| = 2\sqrt{3}$ . ماهي قيمة $|\alpha|$ ؟.

148) أوجد قيمة المقدار: $\frac{1}{2^{2010}}\sum_{n=0}^{1005}(-3)^n\binom{2010}{2n}$

149) أثبت أن:

(i $\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha.\sin^2\alpha + 5\cos\alpha.\sin^4\alpha$

(ii $\sin 5\alpha = \sin^5\alpha - 10\sin^3\alpha.\cos^2\alpha + 5\sin\alpha.\cos^4\alpha$ ؟.

150) لتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية على مجموعة الأعداد الحقيقية بحيث أن: $|a_{n+1}-a_n| \leq 1$ لكل عدد صحيح موجب $n$ ، وعرفنا المتتالية $(b_n)_{n\geq 1}$ بالشكل $b_n = \frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}$ بين أن: $|b_{n+1}-b_n| \leq 1$ لكل عدد صحيح موجب $n$ ؟.

151) برهن أنه إذا كانت $x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$ ،فإن: $x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\alpha$ ؟.

152) حلل المقدار لعوامل حقيقية $1-\sin^5\alpha-\cos^5\alpha$ ؟.

153) إذا كانت $f$ دالة مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ وتحقق العلاقة: $f(z)f(iz)=z^2$ لكل $z\in\mathbb{C}$ ، برهن أن: $f(z)+f(iz)=0$ لكل $z\in\mathbb{C}$ ؟.

154) ليكن $f$ دالة بحيث $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ يحقق : $\forall x\in\mathbb{Z} \quad f(x)-xf(-x)-x=2000$ ، أوجد $f(1)$ ؟.

155) إذا كانت $f$ دالة تحقق أن : $f(xy)=\frac{f(x)}{y}$ لجميع الأعداد الحقيقية الموجبة $x,y$ وكانت $f(500)=3$. فأوجد $f(600)$ ؟.

156) أوجد جميع كثيرات الحدود $f(x)$ التي تحقق $f(x^2+1)=(f(x))^2+1$ بحيث $f(0)=0$ ؟.

157) أوجد جميع كثيرات الحدود $f(x)$ التي تحقق العلاقة: $(x+1)f(x)=(x-10)f(x+1)$ ؟.

158) لتكن لدينا الدالة $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ ولنعتبر أن $a$ عدد حقيقي موجب بحيث أن $f(a)=1$ .برهن أنه إذا كانت $f(x)f(y)+f(\frac{a}{x})f(\frac{a}{y})=2f(xy)$ لكل $(x,y\in(0,\infty))$ فإن $f(x)$ دالة ثابتة ؟.

159) برهن أن معادلتي الدوال التاليتين:

$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad ;x,y\in\mathbb{R}$

$f(x+y+xy)=f(x)+f(y)+f(xy) \quad ;x,y\in\mathbb{R}$

متكافئتين ؟.

160) أوجد جميع كثيرا ت الحدود $f(x)$ التي تحقق $f(x^2)+f(x)f(x+1)=0$ ؟.

161) لتكن $f$ دالة مجالها ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ بحيث أنه لكل $x,y\in\mathbb{R}$ فإن العلاقة التالية متحققة:
$f(x^3+y^3)=(x+y)(f(x))^2+f(x)f(y)+(f(y))^2$ برهن أن لكل $x\in\mathbb{R}$ فإن: $f(2009x)=2009f(x)$ ؟.

162) هل توجد دالة $f$ مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث $f(f(n))=n+2009$ لكل عدد صحيح موجب $n$ ؟.

163) أوجد الدوال التي مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ والتي تحقق:
$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y) \qquad ;(\forall\, x,y\in\mathbb{Q})$ ؟.

164) أوجد جميع الدوال $f$ التي مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية وتحقق المتباينة التالية:
$f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)\ge 3f(x+2y+3z)$ لكل الأعداد الحقيقية $x,y,z$ ؟.

165) أوجد جميع الدوال $f$ من مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ إلى مجموع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بحيث يكون لأي عدد نسبي $x.y$ فإن: $f(x+y)=f(x)f(y)-f(xy)+1$ ؟.

166) هل توجد معادلة $f(n)$ كتطبيق من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة لنفسها، بحيث أنه لكل $n>1$ فإن المعادلة التالية تتحقق : $f(n)=f(f(n-1))+f(f(n+1))$ ؟.

167) إذا كان $x$ عدد موجب أثبت وبعدة طرق أن: $x+\frac{1}{x}\ge 2$ ؟.

168) لجميع الأعداد الحقيقية $(a,b,c\ge 0)$ بحيث: $a+b+c=1$ ،برهن أن:
$2\le(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\le(1+a)(1+b)(1+c)$ ، وناقش متى تحصل المساواة لكلا المتباينتين ؟.

169) لتكن $x,y,z$ أعداد حقيقية تحقق $xyz(x+y+z)=1$ ،أوجد أقل قيمة للمقدار: $(x+y)(y+z)$؟.

170) إذا كان $x,y$ هما طولي ضلعين وكان $z$ هو الوتر في مثلث قائم الزاوية فأثبت أن: $x+y\le\sqrt{2}z$ ؟.

171) سبعة صيادي سمك اصطادوا ما مجموعه 100 سمكة وكل واحد منهم اصطاد عددا مختلفا عن باقي الصيادين برهن على أن ثلاثة من بين السبعة اصطادوا 50 سمكة على الأقل؟

172) إذا كان $a,b$ موجبين برهن أن: $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\ge 4$ ؟.

173) أيهما أكبر $\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}$ أم $\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{7}$ ؟.

174) إذا كان $\mathrm{x}+2\mathrm{y}+3\mathrm{z}=6$ فأوجد القيمة الصغرى للمقدار $x^2+y^2+z^2$ ؟.

175) إذا كان $\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z}=2$ فأوجد أكبر قيمة يمكن أن يأخذها المقدار $xyz^2$ ؟.

176) برهن أن $16<\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}<17$ ؟.

177) أوجد أقل عدد صحيح موجب $m$ بحيث $\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}<m$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة $n$ ؟.

178) إذا كانت $a,b,c$ أعداد موجبة، ناقش صحة العبارة إذا كان $a\cos^2\theta+b\sin^2\theta<c$ فإن:
$\sqrt{a}\cos^2\theta+\sqrt{b}\sin^2\theta<\sqrt{c}$ ؟.

179) إذا كانت $a,b,c,d,e$ أعداد حقيقية بحيث: $a+b+c+d+e=8$ ; $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$ ، حدد أكبر قيمة لــ: $e$ ؟

180) برهن أنه إذا كانت $a,b$ أعداد حقيقية موجبة بحيث $a+b=1$ فإن: $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq\frac{25}{2}$ ؟.

181) حدد قيمة $a$ في المعادلة: $x^2-(3a+1)x+(2a^2-3a-2)=0$ بحيث تكون جذور المعادلة حقيقية ومربعات جذورها أقل ما يمكن؟.

182) لتكن $x,y,z$ أعداد حقيقية غير سالبة بحيث $x+y+z=1$ برهن أن: $x^2y+y^2z+z^2x\leq\frac{4}{27}$ ،وناقش متى تحصل المساواة ؟.

183) لتكن $a_1,a_2,...,a_{2009}$ أعداد حقيقية غير سالبة تحقق الشرطين:

$i)\ a_1+a_2+...+a_{2009}=2$

$ii)\ a_1a_2+a_2a_3+...+a_{2008}a_{2009}+a_{2009}a_1=1$

ولتكن $S=a_1^2+a_2^2+...+a_{2009}^2$ .أوجد أكبر وأقل قيمة ممكنة للمقدار $S$ ؟.

184) برهن أنه لأي أربعة أعداد حقيقية موجبة يوجد عددين ولنعتبرهما $a,b$ بحيث أن: $ab+1\geq\frac{1}{\sqrt{3}}|a-b|$ ؟.

185) لتكن $x,y,z$ أعداد حقيقية غير سالبة بحيث $x+y+z=1$ ،بين أن: $0\leq xy+yz+za-2xyz\leq\frac{7}{27}$ ؟.

186) لتكن $a,b,c$ أعداد حقيقية موجبة أكبر من 1 ،أثبت أن: $2\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right)\geq\frac{9}{a+b+c}$ ؟.

187) أثبت أن: $2009!<(1005)^{2009}$ ؟.

188) بين أن $n!\leq\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ ؟.

189) إذا كانت $a,b,c>0,\ (1+a)(1+b)(1+c)=8$ اثبت أن $abc\leq1$ ؟.

190) إذا كانت $a,b,c$ أطوال لمثلث اثبت أن : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<2$ ؟.

191) إذا كان $a,b,c,d>0$ أثبت أن $\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b}\geq0$ ؟.

192) إذا كانت $x,y,z>1$ وبحيث $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ اثبت أن: $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}<\sqrt{x+y+z}$ ؟.

193) إذا كان $a,b,c$ أعداد حقيقية موجبة $a+b+c=1$ أثبت أن: $ab^2c\leq\frac{1}{64}$ ؟.

194) لأي أعداد موجبة $a,b,c,d$ اثبت أن: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+d}}+\sqrt{\frac{c}{d+a}}+\sqrt{\frac{d}{a+b}}>2$ ؟.

195) إذا كانت $a,b,c,d>0$ فإن:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}+\frac{a^3+b^3+d^3}{a+b+d}+\frac{a^3+c^3+d^3}{a+c+d}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d}\geq a^2+b^2+c^2+d^2$$ ؟.

196) في مثلث $ABC$ بين أن $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$ وأن التساوي متحقق إذا وإذا فقط كان المثلث متطابق الأضلاع؟.

197) إذا كان $x+y+z=2$ فأوجد أكبر قيمة يمكن أن يأخذها المقدار $xyz^2$ ؟.

198) أثبت متباينة الجذر: إذا كان $a>1$ عدد حقيقي فإن: $2(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})<\frac{1}{\sqrt{a}}<2(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})$ ؟.

199) برهن أنه الأعداد الحقيقية الموجبة $a,b,c$ تكون أطوال أضلاع مثلث إذا وفقط إذا كان $a^2+b^2+c^2<2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ ؟.

200) إذا كانت $a_1,a_2,\dots,a_n>0$ اثبت باستخدام $AM-GM$ أن: $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\ge n$ ؟.

201) إذا كان $x$ عدد موجب أثبت وبعدة طرق أن: $x+\frac{1}{x}\ge 2$ ؟.

202) إذا كان $a,b,c$ موجبة أثبت أن: $(ab)^{\frac{1}{3}}+(cd)^{\frac{1}{3}}\le\left((a+c+b)(a+c+d)\right)^{\frac{1}{3}}$ ؟.

203) أثبت أنه إذا كانت $a,b,c$ أعداد حقيقية فإن: $\frac{b^2-a^2}{2a^2+1}+\frac{c^2-b^2}{2b^2+1}+\frac{a^2-c^2}{2c^2+1}\ge 0$ ؟.

204) لتكن $x_1,x_2,\dots,x_n$ أعداد حقيقية موجبة، برهن أن:

$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_2+x_3}+\dots+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n^2}{x_n+x_1}\ge\frac{1}{2}(x_1+x_2+\dots+x_n)$$ ؟.

205) لتكن $a,b,c\ge 1$ أعداد حقيقية بحيث $a+b+c=2abc$. برهن أن:

$$\sqrt[3]{(a+b+c)^2}\ge\sqrt[3]{ab-1}+\sqrt[3]{bc-1}+\sqrt[3]{ca-1}$$ ؟.

206) لتكن $a,b,c,d$ أعداد حقيقية موجبة بحيث $a+b+c+d=1$. برهن أن: $\frac{bcd}{a+2}+\frac{acd}{b+2}+\frac{abd}{c+2}+\frac{abc}{d+2}<\frac{1}{13}$ ؟.

207) لتكن $a,b,c$ أعداد حقيقية موجبة بحيث $ab+bc+ca=3$. أثبت أن:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}$$ ؟.

208) لتكن $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3$ أعداد حقيقية موجبة. برهن أن:

$(a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_3b_1+a_2b_3+a_3b_2)^2\ge 4(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1)$، وبين أن تحقق المساواة في المتباينة إذا وفقط إذا كان $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ ؟.

209) برهن أنه إذا كانت $a,b>0$، فإن $\sqrt[n+1]{ab^n}\le\frac{a+nb}{n+1}$ ؟.

210) لتكن $a,b,c$ أعداد حقيقية موجبة بحيث $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$، أوجد أقل قيمة للمقدار:

$$E=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}$$ ؟.

211) برهن أنه لكل $(a,b>0)$ فإن: $\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4}\ge a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$ ؟.

212) لنعتبر الأعداد الصحيحة الموجبة $a_1 < a_1 < ... < a_n$ بحيث $\sum \frac{1}{a_i} \le 1$ ،برهن أنه لأي $x > 0$ فإن:

$$\left(\sum \frac{1}{a_i^2 + x}\right)^2 \le \frac{1}{2a_i(a_i - 1) + x}$$ ؟.

213) لتكن $(a_k)_{k=1}^n$ متتالية جميع حدودها موجبة برهن أن: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + a_2 + ... + a_k} < 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ ؟.

214) لتكن $a,b,c,d$ أعداد حقيقية موجبة بحيث $a+b+c+d=1$ ،برهن أن: $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \ge \frac{1}{2}$

وبين أن المساواة تحصل إذا وفقط كانت $a=b=c=d=\frac{1}{4}$ ؟.

215) برهن أن $(a+3b)(b+4c)(c+2a) \ge 60abc$ لجميع الأعداد الحقيقية $0 \le a \le b \le c$ ؟.

216) بين أن $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \le \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$ لجميع الأعداد الحقيقية الموجبة $a,b$ ،وناقش متى تحصل المساواة؟.

217) إذا كانت $a,b,c$ أعداد حقيقية غير سالبة ،برهن أن: $\frac{(a+b+c)^2}{3} \ge a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$ ؟.

218) برهن أنه إذا كان كل من $a > 1$ وَ $b > 1$ فإن: $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \ge 8$ ؟.

219) إذا كانت $a,b$ أعداد حقيقية موجبة فبين أن: $a^b + b^a > 1$ ؟.

220) أثبت أنه لأي $a,b,c$ أعداد حقيقية موجبة . فإن: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$ ؟

**اختصارات مهمة**

## المراجع